

Acerca de la existencia de órbitas periódicas y cuencas de atracción de un sistema suave a tramos

On the existence of periodic orbits and basins of attraction for a piecewise-smooth system

Ana María Pulecio Montoya¹, Carlos Daniel Acosta Medina^{2*}, Simeón Casanova Trujillo³

¹M.Sc. en Ciencias-Matemática Aplicada, Grupo de Investigación: Cálculo Científico y Modelamiento Matemático, Facultad de Ingeniería Industrial, Universidad Cooperativa de Colombia, Sede Pasto.
ampuleciom@unal.edu.co

^{2,3}Ph.D. Profesor Asociado, Departamento de Matemáticas y Estadística, Grupo de Investigación: Cálculo Científico y Modelamiento Matemático, Universidad Nacional de Colombia-sede Manizales, Caldas, Colombia.

cdacostam@unal.edu.co
scasanovat@unal.edu.co

Resumen— En este artículo se presenta un estudio analítico de la existencia de puntos fijos y 2-ciclos para un sistema dinámico asociado a una familia cuadrática a tramos con tres parámetros de bifurcación. Se realiza un análisis de la estabilidad de los puntos fijos hallados teniendo en cuenta el criterio de la derivada y calculando sus respectivas cuencas de atracción. Se demuestra que al variar cierto parámetro en un intervalo real, uno de los puntos fijos posee una cuenca de atracción que consta de un intervalo acotado semi-abierto, mientras que para otros valores del parámetro, su cuenca de atracción está formada por una cantidad enumerable de intervalos cerrados y acotados, cuya longitud tiende a cero. Se hace un estudio detallado de la segunda iteración de la función y se demuestra que bajo estas condiciones de los parámetros no existen 2-ciclos. Mediante simulación numérica del sistema, se obtienen ilustraciones de los respectivos diagramas de bifurcación y cuencas de atracción, los cuales coinciden bastante bien con resultados obtenidos analíticamente.

Palabras clave— Bifurcación, estabilidad, punto fijo, sistemas dinámicos.

Abstract— In this article we study the existence of fixed points and 2-cycles for a dynamical system associated to a piecewise quadratic family with three parameters of bifurcation. We obtain the fixed points of the system and include an analytical study of their stability, via derivative's criteria. A computing of the basins of attraction is also presented. When varying one of the parameters in a real interval, one of the fixed point has a basin of attraction consisting of a semi-bounded interval, while in other conditions, also considered, its basin of attraction consists of a countable number of closed and bounded intervals, whose length tends to zero. A detailed study of the second iteration of

the function shows that under these conditions of the parameters there are not 2-cycles. By numerical simulation of the system, illustrations of the respective bifurcation diagrams and basins of attraction are obtained. A good match with the analytical results is achieved.

Key Word — Bifurcation, stability, fixed point, dynamical systems.

I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas dinámicos suaves a trozos (PWS) han sido estudiados ampliamente en los últimos años, debido a la diversidad de fenómenos gobernados por este tipo de sistemas [1]. Estos sistemas están caracterizados porque el espacio de estados queda particionado en conjuntos $S_i \subset \mathbb{R}^n$ con interior no vacío y en cada S_i se tiene un flujo suave de la forma $\dot{x} = f(x, \mu)$. La descripción de la dinámica de un PWS no es sencilla debido a la discontinuidad de los flujos en cada una de las fronteras ∂S_i y por lo tanto no se pueden aplicar las técnicas usuales de sistemas suaves. Como ejemplos de sistemas PWS podemos mencionar, entre otros, los convertidores de potencia donde la dinámica cambia según la acción de conmutación [2], [3], [4], osciladores de impacto [5], [1] (más generalmente los sistemas con impacto [6]).

Fenómenos complejos como adición de periodo y coexistencia de atractores se presentan en sistemas simples

unidimensionales lineales a tramos como por ejemplo en [7] donde se estudia el modelo $x_{n+1} = f(x_n, a, b, \mu, l)$, siendo

$$f(x_n, a, b, \mu, l) = \begin{cases} ax_n + \mu & \text{si } x_n < 0 \\ bx_n + \mu & \text{si } x_n > 0 \end{cases}$$

En [8] se estudia el sistema dado por

$$x_{n+1} = \begin{cases} f_l(x_n) = \alpha x_n + \mu & \text{si } x_n \leq 0 \\ f_r(x_n) = \beta \sqrt{x_n} + \mu + l_d & \text{si } x_n > 0 \end{cases} \quad (1)$$

siendo μ un parámetro de bifurcación y l_d el salto de la discontinuidad. En dicho artículo se estudia la aplicación (1) para $0 < \mu < 1$, $\beta < -1$ y $l_d < 0$ y se reportó, además de los fenómenos de [7], cascadas de atractores periódicos organizados en incremento de periodo y secuencias de adición de periodo al variar un parámetro del sistema.

En este artículo estudiamos la dinámica de un sistema PWS con tres parámetros de bifurcación que está asociado a una familia cuadrática a tramos con el objetivo de caracterizar los puntos fijos y determinar su estabilidad al variar los parámetros en ciertos intervalos.

II. ESTUDIO ANALÍTICO DEL SISTEMA DINÁMICO

A. Modelo Matemático

Consideramos el sistema dinámico discreto representado en Fig. 1. dado por

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} ax_n^2 + b, & \text{si } x_n \leq 0 \\ cx_n^2 + d, & \text{si } x_n > 0 \end{cases} \quad (2)$$

realizando la siguiente escogencia :

$$a < 0, b = \frac{1}{4a}, c > 0 \text{ y } d < 0 \quad (3)$$

B. Puntos Fijos

Dentro de las posibles órbitas que pueda tener un sistema dinámico discreto, las correspondientes a los puntos fijos son las más simples y a su vez una de las más importantes. Empezamos entonces calculando los puntos fijos del sistema (2) y analizando su respectiva estabilidad.

Proposición 2.2.1: Para los valores de los parámetros en (3) se tiene que el sistema (2) cuenta con dos puntos fijos. (Ver Fig.1)

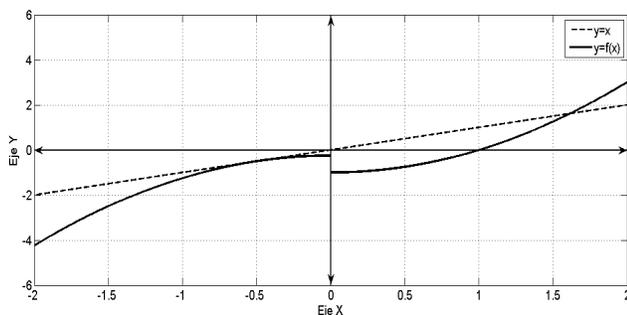


Fig.1. Bosquejo de la función $f(x)$

En efecto, consideremos los siguientes casos:

Caso 1: Si $x \leq 0$, los puntos fijos estarían determinados por las soluciones de

$$ax^2 - x + \frac{1}{4a} = 0 \quad (4)$$

a saber, $x_0 = \frac{1}{2a}$ y en consecuencia existe un punto fijo $P_1 = (\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a})$.

Caso 2: Si $x > 0$, los puntos fijos son las soluciones de

$$cx^2 - x + d = 0 \quad (5)$$

Estas soluciones están dadas por

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4cd}}{2c} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4cd}}{2c} \quad (6)$$

Dado que $d < 0$ y $c > 0$, se tiene de (6) que $x_1 < 0$ y así el único punto fijo en este caso es $P_2 = (x_2, x_2)$.

C. Estabilidad de los Puntos Fijos

Es conocido que un punto fijo P es atractor si dada una condición inicial cercana al punto fijo, el sistema evolucionará hacia dicho punto y que al conjunto de condiciones iniciales cuyas iteraciones tienden al punto fijo se le llama cuenca de atracción (B_p). Es allí donde radica la importancia de determinar las cuencas de atracción de los puntos fijos.

Para nuestro sistema, empezamos notando que la cuenca de atracción de P_2 es vacía. En efecto, $|f'(x_2)| = 1 + \sqrt{1 - 4cd} > 1$ y por el criterio de la derivada se concluye que el punto fijo P_2 es repulsor y su cuenca o base de atracción B_{P_2} , es vacía.

Con respecto a P_1 tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.3.1: El punto fijo P_1 es atractor a derecha y repulsor a izquierda.

Para demostrar el teorema, veamos primero los siguientes resultados:

Proposición 2.3.2: Si $d \geq \frac{1}{2a}$, la cuenca de atracción B_{P_1} está dada por $B_{P_1} = [\frac{1}{2a}, x_2)$, lo cual se ilustra en Fig.2(a).

Para ver esto, consideramos los siguientes casos:

- Si $x < \frac{1}{2a}$, se obtiene la sucesión de iteraciones $\dots < f^n(x) < \dots < f^2(x) < f(x) < x$.

En efecto, por inducción sobre n tenemos:

Para $n = 1$, si $x \leq f(x)$, entonces $x \leq ax^2 + \frac{1}{4a}$. Luego, se tiene que $ax^2 - x + \frac{1}{4a} \geq 0$. Pero esta desigualdad no es posible y por lo tanto $f(x) < x$.

Supongamos que $f^n(x) < f^{n-1}(x) < \dots < f^2(x) < f(x) < x$. Como $x < 0$, se tiene que $(f^{n-1}(x))^2 < (f^n(x))^2$. Veamos que la proposición es cierta para $n + 1$. Supongamos por el contrario que $f^n(x) \leq f^{n+1}(x)$. Así, $a(f^{n-1}(x))^2 + \frac{1}{4a} \leq a(f^n(x))^2 + \frac{1}{4a}$ y se sigue que $(f^n(x))^2 \leq (f^{n-1}(x))^2$, lo que contradice la hipótesis de inducción.

Así pues, dado que $\dots < f^n(x) < \dots < f^2(x) < f(x) < x < \frac{1}{2a}$ se concluye que $f^n(x) \rightarrow \frac{1}{2a}$.

- Si $x \in [\frac{1}{2a}, 0]$, tenemos que $\frac{1}{2a} \leq x \leq 0$ y por lo tanto:

$$\frac{1}{4a} \leq ax^2 \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2a} \leq f(x) \leq \frac{1}{2a} + \left(\frac{-1}{4a}\right)$$

$$\frac{1}{4a} \leq a(f(x))^2 \leq \frac{1}{16a} \Rightarrow \frac{1}{2a} \leq f^2(x) \leq \frac{1}{2a} + \left(\frac{-3}{16a}\right) \quad (7)$$

Continuando inductivamente como en (7) se tiene que $\frac{1}{2a} \leq f^n(x) \leq \frac{1}{2a} - \varepsilon$, donde $\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Luego, $f^n \rightarrow \frac{1}{2a}$.

- Si $x \in \left(0, \sqrt{\frac{-d}{c}}\right]$, tenemos:

$$0 < x^2 \leq \frac{-d}{c} \Rightarrow \frac{1}{2a} \leq d < f(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2a} < f(x) \leq 0 \quad (8)$$

De (8) se sigue que $f^n(f(x)) \rightarrow \frac{1}{2a}$ ($n \rightarrow \infty$) y por lo tanto $f^n(x) \rightarrow \frac{1}{2a}$ ($n \rightarrow \infty$).

- Si $x \in \left(\sqrt{\frac{-d}{c}}, x_2\right)$, mostremos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2a} \leq f^n(x) \leq \sqrt{\frac{-d}{c}} \quad (9)$$

Veamos primero que $f(x) < x$. Supongamos por el contrario que $x \leq f(x)$, luego $cx^2 - x + d \geq 0$, y así $(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$, lo cual no es posible, ya que estamos considerando $0 < \sqrt{\frac{-d}{c}} < x < x_2$. Por lo tanto para x en este intervalo, se tiene que $f(x) < x$.

Además, tenemos que $f(x) > 0$, pues si $cx^2 + d \leq 0$, tendríamos que $x \leq \sqrt{\frac{-d}{c}}$, lo cual es una contradicción. Si

$f(x) \leq \sqrt{\frac{-d}{c}}$ se tiene (9), pues en este caso, $\frac{1}{2a} < 0 < f(x) \leq \sqrt{\frac{-d}{c}}$; y si $f(x) > \sqrt{\frac{-d}{c}}$, podemos encontrar un $n \geq 2$ tal que se tiene la segunda desigualdad considerada en (9). En efecto, si no fuera así, entonces:

$$\sqrt{\frac{-d}{c}} < \dots < f^n(x) < \dots < f(x) < x < x_2 \quad (10)$$

La sucesión $(f^n(x))$ es monótona acotada inferiormente y existe así $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = L$ y

$$\sqrt{\frac{-d}{c}} \leq L < \dots < f^n(x) < \dots < f(x) < x < x_2 \quad (11)$$

Para $\varepsilon = \sqrt{\frac{-d}{c}} - L > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $|f^n(x) - L| < \sqrt{\frac{-d}{c}} - L$, es decir, $f^n(x) < \sqrt{\frac{-d}{c}}$. De esta desigualdad se tiene que $c(f^n(x))^2 + d < L$ y así $f^{n+1}(x) < L$, lo cual contradice (11).

Concluimos entonces que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \leq \sqrt{\frac{-d}{c}}$.

Por inducción se puede ver que la primera desigualdad de (9), es válida para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, para n tal que $f^n(x) \leq \sqrt{\frac{-d}{c}}$, se tiene que $\frac{1}{2a} < f^n(x)$.

En conclusión, tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ que satisface (9) y por lo tanto $f^n(x) \rightarrow \frac{1}{2a}$.

- Si $x > x_2$, por inducción sobre n se demuestra que

$$x_2 < x \leq f(x) \leq \dots \leq f^n(x) \leq \dots \quad (12)$$

y de (12) se sigue que $f^n(x) \rightarrow \frac{1}{2a}$.

Se ha demostrado que si $d \geq \frac{1}{2a}$, entonces $B_{P_1} = \left[\frac{1}{2a}, x_2\right)$.

Proposición 2.3.3: Si $d < \frac{1}{2a}$, la cuenca de atracción B_{P_1} está dada por (Fig.2(b)):

$$B_{P_1} = \left[\frac{1}{2a}, 0\right] \cup \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} [f_m(x_3), f_m(x_4)]\right)$$

siendo $f_m(x_3)$ y $f_m(x_4)$ la m -ésima pre-iteración de los números:

$$x_3 = \sqrt{\frac{1 - 2ad}{2ac}} \text{ y } x_4 = \sqrt{\frac{-d}{c}}$$

es decir:

$$f^m(f_m(x_3)) = x_3 \text{ y } f^m(f_m(x_4)) = x_4$$

Para ver esto consideramos los siguientes casos:

- Si $x < \frac{1}{2a}$, un procedimiento totalmente análogo al caso $d \geq \frac{1}{2a}$ conduce a que $f^n(x) \rightarrow \frac{1}{2a}$.
- Si $x \in \left[\frac{1}{2a}, 0\right]$, de (7) se sigue que $f^n(x) \rightarrow \frac{1}{2a}$.
- Si $x \in \left(0, \sqrt{\frac{1-2ad}{2ac}}\right)$, se tiene $f(x) = cx^2 + d < \frac{1}{2a}$, por lo tanto, por el primer caso, $f^n(f(x)) \rightarrow \frac{1}{2a}$ y así $f^n(x) \rightarrow \frac{1}{2a}$.
- Si $x \in \left[\sqrt{\frac{1-2ad}{2ac}}, \sqrt{\frac{-d}{c}}\right]$, se tiene que $\frac{1}{2a} \leq cx^2 + d \leq 0$, de donde $f^n(f(x)) \rightarrow \frac{1}{2a}$ y así $f^n(x) \rightarrow \frac{1}{2a}$.

Veamos inductivamente que si $x \in [f_N(x_3), f_N(x_4)]$, se tiene

$$\sqrt{\frac{1-2ad}{2ac}} \leq f^N(x) \leq \sqrt{\frac{-d}{c}} \quad (13)$$

Para $N = 1$, sea $x \in [f_N(x_3), f_N(x_4)]$. Luego,

$$\sqrt{\frac{1-2ad}{2ac^3} - \frac{d}{c}} \leq x \leq \sqrt{\frac{-d}{c^3} - \frac{d}{c}}$$

de donde

$$\sqrt{\frac{1-2ad}{2ac}} \leq f(x) = cx^2 + d \leq \sqrt{\frac{-d}{c}}$$

Supongamos ahora que (13) es cierta para $x \in [f_N(x_3), f_N(x_4)]$ y sea $x \in [f_{N+1}(x_3), f_{N+1}(x_4)]$, es decir,

$$\sqrt{\frac{f_N(x_3) - d}{c}} \leq x \leq \sqrt{\frac{f_N(x_4) - d}{c}}$$

Así, $f_N(x_3) \leq f(x) \leq f_N(x_4)$ y por hipótesis de inducción se tiene que $x_3 \leq f^N(f(x)) \leq x_4$, o bien $x_3 \leq f^{N+1}(x) \leq x_4$.

De (13) se sigue que $f^n(x) \rightarrow \frac{1}{2a}$.

Análogamente se tiene por inducción que si $x \in (f_{N-1}(x_4), f_N(x_3))$, entonces $0 < f^N(x) < x_3$ y por lo tanto $f^n(x) \rightarrow \frac{1}{2a}$.

- Si $x > x_2$, por (11) se tiene que $f^n(x) \rightarrow \frac{1}{2a}$, de donde se concluye la proposición 2.3.2.

De la proposición 2.3.2 y la proposición 2.3.3 obtenemos el teorema 2.3.1.

Ahora bien, en la proposición 2.3.3 podemos ver que los intervalos de la cuenca de atracción de P_1 son infinitos, disyuntos y se encuentran contenidos en el intervalo $\left(\frac{1}{2a}, x_2\right)$, lo cual nos hace ver que la longitud de estos intervalos debe tender a cero, esto es:

Proposición 2.3.4: Con la notación de la Proposición 2.3.3, $f_N(x_4) - f_N(x_3) \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$.

Para ver esto, definamos $g(x) = \sqrt{\frac{x-d}{c}}$. Así, tenemos que $g(x)$ posee un único punto fijo en x_2 .

Veamos que si $x \in (0, x_2)$, entonces $g^n(x) \rightarrow x_2$. En efecto, por inducción sobre n se tiene que:

$$x < g(x) < \dots < g^n(x) < x_2 \quad (14)$$

Por lo tanto, existe $L \leq x_2$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x) = L$. Supongamos que $L < x_2$ y sea $\varepsilon = L - (cL^2 + d)$. Dado que $x_1 < L < x_2$ se tiene que $\varepsilon > 0$, por lo tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, se tiene que $L - g^n(x) < \varepsilon$. Luego, $g^n(x) > cL^2 + d$ y así, $g^{n+1}(x) > L$, lo cual es una contradicción.

Ahora bien, dado que $0 < x_3 < x_2$ y $0 < x_4 < x_2$, entonces $g^n(x_3) \rightarrow x_2$ y $g^n(x_4) \rightarrow x_2$. Pero, $g^n(x_3) = f_n(x_3)$ y $g^n(x_4) = f_n(x_4)$, de donde $f_N(x_4) - f_N(x_3) \rightarrow 0$.

D. Existencia de 2-ciclos.

En cuanto a la existencia de 2-ciclos o puntos fijos de la segunda iteración del sistema, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2. 4.1: El sistema presentado en (2) junto con los parámetros establecidos en (3), no presenta 2-ciclos.

En efecto, la aplicación f^2 viene dada por

$$f^2(x) = \begin{cases} a(ax^2 + b)^2 + b & \text{si } x \leq 0 \\ a(cx^2 + d)^2 + b & \text{si } 0 < x \leq \sqrt{\frac{-d}{c}} \\ c(cx^2 + d)^2 + d & \text{si } \sqrt{\frac{-d}{c}} < x \end{cases}$$

Consideremos los siguientes casos:

Caso 1: Si $x \leq 0$, $f^2(x) - x = \left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 \left(a^3x^2 + a^2x + \frac{5a}{4}\right)$. Tenemos que $x = \frac{1}{2a}$ es un punto fijo y $\left(a^3x^2 + a^2x + \frac{5a}{4}\right)$ no tiene raíces reales con nuestra elección de parámetros. Por tanto, si $x \leq 0$ no hay 2-ciclos.

Caso 2: Si $0 < x \leq \sqrt{\frac{-d}{c}}$, se tiene que $f(x) \leq 0$ y por lo tanto

$a(f(x))^2 + b \leq b = \frac{1}{4a} < 0 < x$. Así, $f^2(x) < x$ y no existen 2-ciclos.

Caso 3: Si $\sqrt{\frac{-d}{c}} < x$, se tiene que $f^2(x) - x = \left(x - \frac{1 \pm \sqrt{1-4cd}}{2c}\right)(c^3x^2 + c^2x + c + c^2d)$ y dado que $(c^3x^2 + c^2x + c + c^2d)$ no tiene raíces reales, tenemos que no existen 2-ciclos.

III. EXPERIMENTACIÓN NUMÉRICA

En esta sección presentamos diagramas de bifurcaciones obtenidos mediante algoritmos en Matlab con el fin de visualizar los resultados analíticos.

Para Fig.2(a) y Fig.2(b) se ha implementado un algoritmo que bajo condiciones iniciales y los valores de los parámetros fijos, calcula las iteraciones de la función y determina si estas convergen al punto fijo.

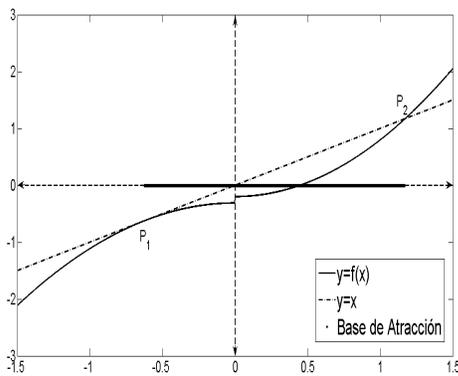


Fig.2(a). Base de atracción para P_1 con $d \geq \frac{1}{2a}$.

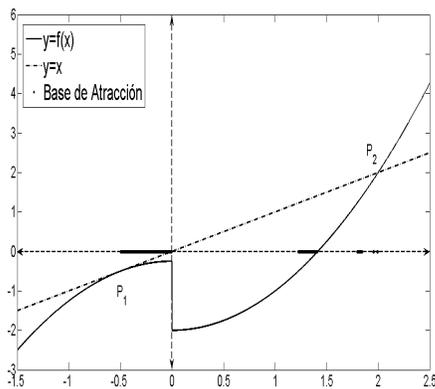


Fig.2(b). Base de atracción para P_1 con $d < \frac{1}{2a}$.

La Fig. 3(a). muestra el diagrama de bifurcaciones al variar el parámetro a . En esta podemos apreciar la existencia de un punto fijo estable para ciertos valores de a . Notamos que si

$a \rightarrow -\infty$ el punto fijo estable tiende a 0; y si $a \rightarrow 0^-$ el punto fijo decrece a $-\infty$. La Fig. 3(b). muestra la existencia de puntos fijos inestables para cada $c \in (0.01,4)$. Podemos ver que si $c \rightarrow 0^+$, el punto fijo inestable crece hacia $+\infty$; y si $c \rightarrow +\infty$, el punto tiende a cero.

IV. CONCLUSIONES

Al variar los parámetros de acuerdo a (3), el sistema (2) presenta los puntos fijos P_1 y P_2 , donde P_2 es repulsor y P_1 es atractor a derecha.

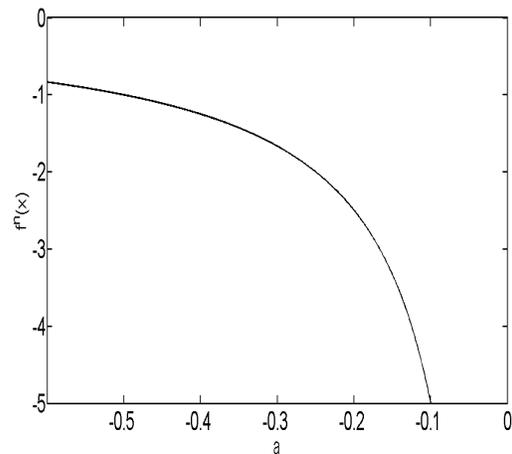


Fig. 3(a). Diagrama de bifurcaciones variando el parámetro a y $b = \frac{1}{4a}$ en el intervalo $(-0.6,0)$, donde $c = 1$ y $d = -1$.

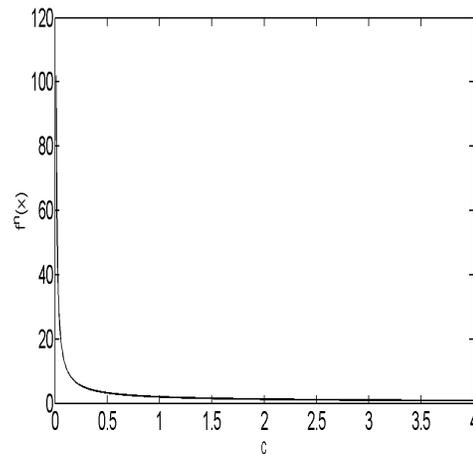


Fig. 3(b). Puntos fijos inestables variando el parámetro c donde se ha escogido $a = -1$ y $d = -2$.

Al analizar la estabilidad del punto fijo P_1 , se ha demostrado que el valor de la cuenca de atracción depende de la variación del parámetro d .

Resulta de especial interés el caso en que $d < \frac{1}{2a}$, dado que cuando $x \rightarrow x_2^-$, la cuenca de atracción del punto fijo P_1

es una cantidad enumerable de intervalos cerrados en los que el límite superior e inferior tienden a x_2 , por lo que la longitud de estos intervalos tiende a cero (Ver Fig.2(b)).

Por su parte, cuando $d \geq \frac{1}{2a}$, la cuenca de atracción de P_1 consta de un intervalo semiabierto y acotado, cuyo límite superior es x_2 (Ver Fig.2(a)).

Teniendo en cuenta que los resultados numéricos se han obtenido de forma independiente, la experimentación numérica logra ilustrar los resultados obtenidos analíticamente.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación fue financiada gracias al proyecto “Análisis dinámico de un reactor continuo de tanque agitado (RCTA) con formación de biopelículas para el tratamiento de aguas residuales” de la Convocatoria Apoyo a Tesis de Posgrado-DIMA 2012 de la Universidad Nacional de Colombia.

REFERENCIAS

- [1]. M. Di Bernardo, C. J. Budd, A. R Champneys, P. Kowalczyk (2008), Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications, Applied Mathematical Sciences, Vol. 163, Springer.
- [2]. Chi Kong Tse (2003), Complex Behavior of Switching Power Converters, New York: CRC Press.
- [3]. Fabiola Angulo García. (2004), Análisis de la Dinámica de Convertidores Electrónicos de Potencia usando PWM Basado en Promediado cero de la dinámica del error (ZAD), Tesis Doctoral, U.P.C.
- [4]. Gerard Olivar Tost. (1997), Chaos in the Buck Converter., Doctoral Thesis. Universidad Politécnica de Catalunya.
- [5]. B. Brogliato.(1999), Nonsmooth Mechanics (2 ed), Springer.
- [6]. Jan Awrejcewicz, Claude-Henri Lamarque (2003), Bifurcation and Chaos in Nonsmooth Mechanical Systems, Vol.45, World Scientific.
- [7]. Viktor Avrutin and Michael Schanz, Soumitro Banerjee (2007), Codimension-three bifurcations: Explanation of the complex one, two, and three-dimensional bifurcation structures in nonsmooth maps. Physical Review E 75, 066205.
- [8]. Partha Sharathi Dutta, Soumitro Banerjee (2010 October), Period Increment Cascades in a Discontinuous Map with Square-Root Singularity, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B, Vol. 14, Núm. 3.
- [9]. Zhanybai T. Zhusubaliyev and Erik Mosekilde (2003), Bifurcations and chaos in piecewise-smooth dynamical systems, Vol 44, World Scientific.
- [10]. Edward Ott (2002), Chaos in dynamical systems (2 ed), Cambridge.