

# Comparación de flujos de carga probabilísticos empleados en sistemas de distribución levemente enmallados

Comparison of probabilistic load flow used for weakly meshed distribution systems

Alan Dagoberto Arias-Hernández<sup>1</sup>, Ricardo Alberto Hincapié-Isaza<sup>2\*</sup>, Ramón Alfonso Gallego-Rendón<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Estudiante de Maestría en Ingeniería Eléctrica, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad Tecnológica, Pereira, Colombia

<sup>2,3</sup>Docente del Programa de Ingeniería Eléctrica, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Grupo de Planeamiento de Sistemas Eléctricos, Universidad Tecnológica, Pereira, Colombia

alandaher@gmail.com

ricardohincapie@utp.edu.co

ragr@utp.edu.co

**Resumen**—Para encontrar las condiciones operativas de los sistemas de distribución tradicionalmente se han considerado flujos de carga radiales debido a las características topológicas de la red, las cuales se han evaluado bajo condiciones determinísticas. Sin embargo en los últimos años debido a la incorporación de generadores distribuidos, el diseño de redes levemente enmalladas y el desarrollo de Smart Grids, es importante emplear flujos de carga que se adapten a la pérdida de la naturaleza radial de la red y que consideren aspectos estocásticos de la generación y la demanda. Con el fin de solucionar el problema del flujo de carga probabilístico para redes levemente enmalladas, en este artículo se presenta una comparación de tres algoritmos: el método de dos puntos, el método de tres puntos y simulación de Montecarlo. Los tres algoritmos son usados en conjunto con el método de la cadena. Para verificar la efectividad de los métodos se emplea un sistema de distribución de 69 nodos. Esta comparación permite verificar las características de los diferentes algoritmos considerados, proporcionando información adicional a los analistas de sistemas de distribución que trabajan en el sector eléctrico, garantizando de esta forma la selección de la metodología que más se adapte a las necesidades que se presenten.

**Palabras clave**—Estimación por puntos, flujo de carga probabilístico, redes de distribución, simulación de Montecarlo, sistemas de distribución enmallados.

**Abstract**—To find the operating conditions of distribution systems have traditionally been considered radial load flow due to the topological characteristics of the network, which have been evaluated under deterministic conditions. However in recent years due to the incorporation of distributed generators, design of weakly meshed distribution systems and the development of Smart Grids, it is important to use a load flow to adapt to the loss of the radial nature of the network and considers stochastic aspects of the generation and the demand. In order to solve the problem of probabilistic load flow for weakly meshed distribution systems, in this paper a comparison of three algorithms are presented: the two-point method, the three-point method and Montecarlo simulation. The three algorithms are used in conjunction with the method of the chain. To verify the effectiveness of the methods of distribution system

of nodes 69 is used. This comparison allows verifying the characteristics of the different algorithms considered, providing additional information to distribution systems analysts working in the electric power sector, thus ensuring the selection of the methodology that best suits to their needs.

**Key Word**— Point estimate method, probabilistic load flow, distribution networks, Montecarlo simulation, weakly meshed distribution systems.

## I. INTRODUCCIÓN

El estudio de los sistemas de distribución es un tema de gran actualidad para el sector eléctrico debido al creciente interés de las empresas por mejorar la eficiencia en la operación de la red y su estado financiero. Este esfuerzo es motivado adicionalmente por las altas rentabilidades que son obtenidas cuando se cuenta con un sistema bien planificado y una operación adecuada.

Para obtener el estado operativo de estos sistemas, tradicionalmente se ha empleado como herramienta el flujo de carga. Existen diversos métodos para dar solución al flujo de carga como son Gauss Seidel y Newton Raphson [1]. Estos son muy utilizados en sistemas de transmisión los cuales poseen características como topología enmallada, existencia de un gran número de generadores y elementos con control, entre otros. Sin embargo los sistemas de distribución poseen características diferentes entre las que se destacan su configuración radial y relación R/X cercana a uno [2]. Dado lo anterior surge la necesidad de contar con un flujo de carga específico para el estudio de redes de distribución y con los cuales se analicen sistemas radiales y sin elementos de control. Entre los métodos propuestos están el de barrido iterativo [3], suma de potencias [4] y el método de la regla de la cadena [5].

Los flujos de carga que generalmente se usan en sistemas de distribución son del tipo estático; esto quiere decir que solo se consideran condiciones determinísticas sin llevar en cuenta la aleatoriedad de las variables del sistema como demanda y generación, las cuales generalmente son estudiadas usando un flujo de carga determinístico, y requiriendo en su ejecución de una gran cantidad de iteraciones. En tales circunstancias resulta más aconsejable el uso de un flujo de carga estocástico el cual analice la incertidumbre de las variables de un sistema eléctrico, indicando la media, los rangos de variación de dichas variables y la probabilidad de que éstas se mantengan en un punto de operación adecuado.

El flujo de potencia probabilístico fue introducido por primera vez por Borkowska en 1974 [6] y desde entonces se han propuesto una gran cantidad de metodologías en la literatura para resolver dicho problema de manera eficiente y precisa. Estas metodologías se pueden clasificar en 4 grupos como se muestran en la Tabla 1, donde FFT, CM, FOSMM y PEMs son Transformada de Fourier, Método Cumulante, Método de Primer Orden, Segundo Momento y Método de Estimación por Puntos, respectivamente.

Categorías	Metodologías	Referencias
<b>Métodos Analíticos</b>	FFT, CM	[7-10]
<b>Técnicas Aproximadas</b>	FOSMM, PEMs	[11-12]
<b>Procedimientos Heurísticos</b>	Fuzzy Logic	[13]
<b>Simulación de Montecarlo</b>	----	[11,14]

Tabla 1. Metodologías de solución del flujo de potencia probabilístico

Los métodos de estimación por puntos se clasifican en la categoría de las técnicas aproximadas. Su en 2005 fue el primero en estudiar el problema probabilístico del flujo de potencia aplicando el método de estimación por puntos [15] y Hong desarrolló el uso del esquema 2m en [16]. Posteriormente Morales y Pérez-Ruiz mostraron el ineficiente desempeño exhibido por este método si el número de variables aleatorias de entrada era grande, y sugirieron el uso de un esquema alternativo 2m+1 para superar esta limitación [11]. En [12] Peñuela *et al.* analizan el efecto de la generación distribuida en redes de distribución poco enmalladas empleando el método de estimación de dos puntos.

En la literatura especializada los flujos de carga probabilísticos en sistemas de distribución han sido desarrollados para ser aplicados tanto en redes radiales como en redes levemente enmalladas, dado que en este último se contempla el caso de la generación distribuida. Shirmohammadi *et al.* en [17] describen un método para resolver flujos de potencia para redes de transmisión y redes de distribución poco enmalladas y con generación distribuida, utilizando como principio básico el método de compensación, para lo cual se utilizan inyecciones de corriente que se adicionan al abrir las líneas de la red con el fin de convertir el sistema poco enmallado en un sistema radial. Luo y Semlyen

en [18] y Rajcic *et al.* en [19] muestran que en el método de compensación se puede utilizar la matriz de puntos de quiebre como matriz de sensibilidad para el cálculo de los errores debido a las diferencias de voltajes. Zhu y Tomsovic en [20] muestran el uso de dos matrices de sensibilidad en lugar de una, de forma que una matriz represente las mallas formadas por líneas y otra matriz las mallas formadas por generación distribuida.

En [21] presentan un algoritmo basado en el flujo de carga de Newton-Raphson y simulación de Montecarlo, el cual es usado en el análisis de todos los posibles escenarios. El algoritmo propuesto es usado para obtener flujos de potencia horaria de un sistema típico el cual tiene conectada generación distribuida. En [22] se presenta un flujo de potencia óptimo probabilístico que lleva en cuenta incertidumbre en la carga, el comportamiento estocástico del viento en la generación eólica y los límites térmicos de las líneas. Para la solución se usa el método de estimación por puntos. Los resultados obtenidos son comparados con la simulación de Montecarlo. En [23] desarrollan un flujo de carga probabilístico que emplea la simulación de Montecarlo, para evaluar la influencia de la generación fotovoltaica en los sistemas de distribución. Además de estudiar la aleatoriedad, se analiza la correlación de estos generadores y los momentos de arranque y de parada. En [24] se presenta un flujo de carga probabilístico para el estudio de sistemas de distribución desbalanceados, levemente enmallados y con generación dispersa. Este método considera incertidumbre tanto en la demanda como en la generación. Para mejorar la eficiencia computacional se usa un método eficiente de probabilidad y se aprovechan las características propias del flujo de carga radial. La estrategia de probabilidad usa el método de los tres puntos. El modelo considera el impacto de la instalación de generación dispersa en el flujo de carga.

Con el fin de solucionar el problema del flujo de carga probabilístico para redes de distribución levemente enmalladas, en este trabajo se realiza una comparación de tres algoritmos: el método de estimación de dos puntos, el método de estimación de tres puntos y la simulación de Montecarlo. Todos los métodos emplean como flujo de carga el método de la regla de la cadena.

Los métodos de estimación por puntos concentran la información estadística de un problema con m variables aleatorias de entrada en K puntos para cada variable, llamadas concentraciones. Usando estos puntos y la función H que relaciona las variables de entrada y salida, se obtiene la información acerca de la incertidumbre asociada con el problema. La simulación de Montecarlo permite simular las variables aleatorias a través de la realización repetida de experimentos y su análisis estadístico. Estas simulaciones de experimentos aleatorios se realizan con base en la generación de números aleatorios o valores de las variables que siguen diferentes distribuciones de probabilidad. La base del método

de simulación de Montecarlo es la generación de números aleatorios.

Por otro lado el método de la regla de la cadena permite simplificar las operaciones matemáticas del flujo de carga cuando la topología de la red no es alterada. La principal característica de este método es que emplea matrices Jacobianas de tamaño 3x3 las cuales permanecen constantes durante todo el proceso [5].

La comparación entre los tres flujos de potencia probabilísticos permite verificar las características de los diferentes algoritmos considerados, proporcionando información adicional a los analistas de sistemas de distribución que trabajan en el sector eléctrico, garantizando de esta forma la selección de la metodología que más se adapte a las necesidades que se presenten.

Este artículo está presentado de la siguiente forma. En la sección II se describe el método de la regla de la cadena. En la sección III se ilustran los algoritmos de los métodos de dos y tres puntos y la simulación de Montecarlo. En sección IV se presenta la aplicación de la metodología propuesta y los resultados obtenidos. Finalmente se presentan las conclusiones y recomendaciones derivadas de este artículo y la bibliografía respectiva.

## II. FLUJO DE CARGA

### A. Redes radiales

El flujo de carga radial empleado en este artículo es el método de la regla de la cadena, el cual fue propuesto por Baran y Wu [5]. Para ilustrar este algoritmo se emplea el sistema de distribución de la figura 1.

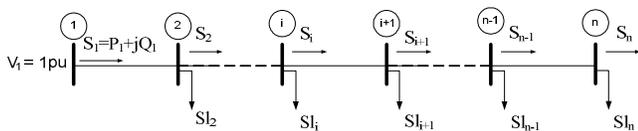


Figura 1. Sistema de distribución con n nodos

Como el voltaje en el nodo slack es conocido (1 pu), entonces la potencia y el voltaje en el nodo 2 pueden ser calculados como sigue:

$$S_2 = S_1 - S_{LOSS1} - SL_2 = S_1 - Z_{1-2} \left( \left| S_1 \right|^2 / V_1^2 \right) - SL_2 \quad (1)$$

$$V_2 \angle \theta_2 = V_1 - Z_{1-2} I_1 = V_1 - Z_{1-2} \left( S_1^* / V_1 \right) \quad (2)$$

Reduciendo estas ecuaciones, expresándolas en su forma rectangular y aplicándolas para todos los nodos, se obtienen las siguientes expresiones:

$$P_{i+1} = P_i - \left[ R_{i,i+1} \left( P_i^2 + Q_i^2 \right) / V_i^2 \right] - PL_{i+1} \quad (3)$$

$$Q_{i+1} = Q_i - \left[ X_{i,i+1} \left( P_i^2 + Q_i^2 \right) / V_i^2 \right] - QL_{i+1} \quad (4)$$

$$V_{i+1}^2 = V_i^2 - \frac{2(R_{i,i+1}P_i + X_{i,i+1}Q_i) + (R_{i+1}^2 + X_{i+1}^2)(P_{i+1}^2 + Q_{i+1}^2)}{V_i^2} \quad (5)$$

Donde  $R_{i,i+1}$ ,  $X_{i,i+1}$ ,  $PL_{i+1}$  y  $QL_{i+1}$  son la resistencia, reactancia y potencias activa y reactiva entre los nodos  $i$  e  $i+1$ , respectivamente.

Con las ecuaciones (3) a (5) se determinan los flujos de potencia activa y reactiva en el nodo de envío de las líneas del sistema y los voltajes en los nodos, sin necesidad de utilizar los ángulos de fase. También se pueden expresar estas ecuaciones como sigue:

$$x_{i+1} = f_{i+1}(x_i) \quad (6)$$

Donde  $X_i = [P_i, Q_i, V_i^2]^T$  representa las variables de estado en el nodo  $i$ . De acuerdo a esto, en el nodo 1 (slack) se cumple que:

$$X_1(1,3)^T = V_1^2 = 1 \text{ pu} \quad (7)$$

En el nodo terminal se cumple que:

$$P_n = X_n(1,1)^T = 0 \quad (8)$$

$$Q_n = X_n(1,2)^T = 0 \quad (9)$$

Esto se debe a que la única potencia tanto activa como reactiva que sale del último nodo es igual al valor de la demanda. Así, las ecuaciones (3) a (5) junto con estas condiciones, representan el sistema de ecuaciones del flujo que se debe resolver y se expresan de la siguiente forma:

$$G(x) = 0 \quad (10)$$

Donde  $x = [x_1^T \dots x_n^T]^T$  son las variables de estado. De acuerdo a esto, para un perfil de carga dado se resuelven las ecuaciones del flujo para determinar el punto de operación del sistema. Sin embargo en lugar de resolver la ecuación (10) se puede reducir su número si se considera que solo es necesario conocer las variables al inicio del ramal  $x_1 = [P_1, Q_1, V_1^2]^T$ , ya que el resto de variables pueden ser calculadas utilizando las ecuaciones (3) a (5). En realidad solo se debe resolver para  $x_1 = [P_1, Q_1]^T$  puesto que el valor de  $V_1^2$  es conocido. Así las ecuaciones de flujo se reducen a la forma:

$$H(x_1) = 0 \quad (11)$$

Esta ecuación se resuelve usando la siguiente metodología, la cual involucra tres pasos que son ejecutados iterativamente hasta lograr un criterio de convergencia. Para un valor estimado de  $x_1$  en la iteración  $j$  se tiene:

- i. Cálculo de los errores  $H(x^j)$ .

- ii. Construcción de la matriz Jacobiana del sistema de la siguiente manera:

$$J(x^j) = \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=x^j} \quad (12)$$

- iii. Solución del sistema de ecuaciones para actualizar las variables de estado, el cual consiste en:

$$J(x^j)\Delta x^j = -H(x^j) \quad (13)$$

Los pasos se repiten hasta lograr que los errores  $H(x^j)$  sean próximos a cero. La matriz Jacobiana del ramal se obtiene aplicando la regla de la cadena sobre las matrices Jacobianas propias de las líneas en el ramal, las cuales tienen la siguiente forma:

$$J_{i,i+1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{i+1}}{\partial P_i} & \frac{\partial P_{i+1}}{\partial Q_i} \\ \frac{\partial Q_{i+1}}{\partial P_i} & \frac{\partial Q_{i+1}}{\partial Q_i} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Al aplicar la ecuación (14) en las ecuaciones (3) y (4) se obtiene la expresión para calcular las matrices Jacobianas correspondientes a cada línea:

$$J_{i,i+1} = \begin{bmatrix} 1 - 2R_{i,i+1} \frac{P_i}{V_i^2} & -2R_{i,i+1} \frac{Q_i}{V_i^2} \\ -2X_{i,i+1} \frac{P_i}{V_i^2} & 1 - 2X_{i,i+1} \frac{Q_i}{V_i^2} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Ahora se usa la regla de la cadena para obtener la matriz Jacobiana del ramal como sigue:

$$J = J_{1,2} \times J_{2,3} \times \dots \times J_{n-1,n} \quad (16)$$

A la metodología propuesta se le realizan algunos cambios de tal manera que se obtenga una mejora de la eficiencia computacional del algoritmo. De acuerdo a esto, al resolver la ecuación (11) se hace una estimación de  $x_i = [P_i, Q_i]^T$  en cada uno de los ramales del sistema, esto es, se estiman los valores de las potencias activas y reactivas de los nodos que alimentan cada ramal. Esto es de importancia ya que la estimación de un buen punto inicial mejora la convergencia del algoritmo. La estimación del punto inicial se realiza haciendo un barrido desde los nodos terminales hacia la fuente calculando la carga servida por cada nodo. Posteriormente se aplican las ecuaciones (3) a (5) para actualizar las variables de estado y obtener los errores en los nodos terminales de cada rama del sistema. Es de notar que con este punto inicial se calcula la matriz jacobiana de cada rama, dando una buena dirección de búsqueda para encontrar la solución de manera más rápida.

Por otro lado en cada iteración del flujo de carga se realizan los pasos descritos previamente para cada una de las ramas

del sistema, iniciando por aquellos ramales inferiores hasta llegar al principal; este orden es debido a que los flujos de potencia en los ramales inferiores afectan el valor de los flujos en los ramales superiores (aguas arriba). Con estas consideraciones se evita la actualización de los ramales que ya han logrado la convergencia y cuyos cambios en las siguientes iteraciones sean despreciables; sin embargo se debe cumplir lo siguiente:

- En cada ramal el valor de la tensión en el nodo que lo alimenta tiene que llegar al valor final. Para asegurar que esto se cumpla se monitorea la diferencia en el valor del voltaje entre iteraciones en dicho nodo, es decir:

$$|V_k^2(j) - V_k^2(j-1)| \leq \text{tolerancia} \quad (17)$$

Donde  $j$  representa la iteración actual,  $j-1$  representa la iteración anterior y  $k$  el nodo que alimenta el ramal.

- Una vez se cumple el criterio anterior se verifica que el error en el ramal, es decir,  $P$  y  $Q$  del nodo terminal, sea menor a otro valor de tolerancia:

$$\max(P_{kn}^j, Q_{kn}^j) \leq \text{tolerancia} \quad (18)$$

Donde  $k$  representa la rama y  $n$  el nodo final de la rama  $k$  en la iteración  $j$ .

Al cumplir ambos requisitos, el ramal ha logrado convergencia y no se requieren actualizar las variables de estado. Con esto se logra que el algoritmo haga menos cálculos en cada iteración y por ende disminuya el tiempo de cómputo para resolver el problema.

## B. Redes levemente enmalladas

Para analizar el estado operativo de una red levemente enmallada es posible utilizar un método en el cual se transforme esta red a una radial, para luego usar un flujo de carga radial para su solución. El método empleado es conocido como compensación de corrientes, el cual busca volver radial el sistema poco enmallado al asignar inyecciones de corriente en los puntos de separación de las mallas, para compensar el flujo de corriente en estos puntos; finalmente se resuelve el problema del flujo de carga utilizando un método radial [17]. Para ilustrar este método se emplea el sistema de la figura 2.

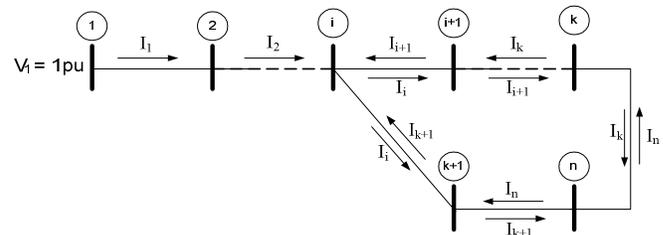


Figura 2. Sistema de distribución poco enmallado

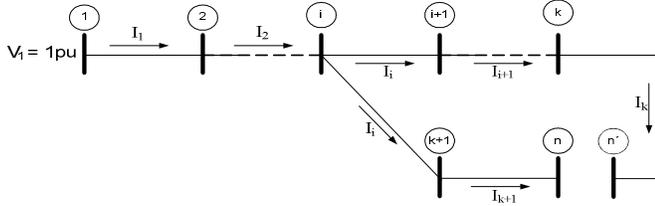


Figura 3. Sistema de distribución transformado a una red radial. Se puede observar una malla formada por los nodos  $i$ ,  $i+1$ ,  $k$ ,  $k+1$  y  $n$ , en la cual el flujo de corriente a través de dicha malla es incierto, y la corriente puede seguir el sentido de las agujas del reloj en algunos de los elementos y el sentido contrario en otros. Como primer paso la red poco enmallada es transformada en una radial, abriendo una de las líneas que forman la malla en un nodo. Para este caso se realiza esta acción en el nodo  $n$  y se crea un nodo ficticio  $n'$ , en el cual se conectará dicha línea, tal como se muestra en la figura 3.

El procedimiento de apertura se debe realizar para cada una de las mallas en unos lugares que se conocen como puntos de quiebre; de esta forma el número de nodos ficticios creados será igual al número de mallas que existan en el sistema. Para que la red radial sea equivalente a la red original se deben aplicar inyecciones de corriente en los puntos de quiebre ( $n$  y  $n'$ ), de igual magnitud y con signo opuesto. Esto reemplaza la corriente que circularía por la línea que se abrió o quebró en la configuración original. Es importante aclarar que en este artículo se utilizan inyecciones de potencia activa y reactiva en lugar de inyecciones de corriente, ya que el flujo de carga radial es implementado con base en inyecciones de potencia. El método se basa en la compensación de inyecciones de potencia en los puntos de quiebre de manera que la diferencia de voltaje entre estos nodos sea igual a cero. Para lograr que se cumpla esta condición se usa la siguiente ecuación:

$$M\Delta S = CV \tag{19}$$

Donde  $\Delta S$  es el vector de corrección de inyecciones de potencia en los puntos de quiebre,  $\Delta V$  es el vector de diferencia de voltajes en los puntos de quiebre y  $M$  es la matriz de sensibilidad que indica los cambios de  $\Delta V$ . En los puntos de quiebre la matriz de impedancias equivalentes es usada como matriz de sensibilidad basados en las siguientes suposiciones: las cargas y otros elementos de conexión no son representados en la matriz y todos los voltajes en los nodos son cercanos a 1 p.u. y sus ángulos de fase cercanos a 0. Las correcciones de las inyecciones aplicadas en los puntos de quiebre se determinan con la ecuación (19). En los puntos de quiebre la impedancia equivalente de Thévenin es definida como sigue:

$$\bar{Z} \bar{I} = \bar{V} \tag{20}$$

Donde  $V$  e  $I$  son los vectores de voltaje y corriente en los puntos de quiebre, respectivamente. Como una red radial se supone lineal, entonces se utilizan las diferencias de

corrientes y voltajes, por lo que la ecuación (20) es definida como:

$$\bar{Z} \bar{\Delta I} = \bar{\Delta V} \tag{21}$$

Al asumir que todos los voltajes en los nodos están cerca de 1 p.u. y que los ángulos de fase son pequeños, entonces se puede decir que  $\Delta I \approx \Delta S^*$ ; de esta manera la ecuación (21) se puede expresar como:

$$\bar{Z} \bar{\Delta S}^* = \bar{\Delta V} \tag{22}$$

Expresando las variables de la ecuación (22) en sus coordenadas rectangulares, se tiene que:

$$\bar{Z} = R + jX \tag{23}$$

$$\bar{\Delta S}^* = \bar{\Delta P} - j\bar{\Delta Q} \tag{24}$$

$$\bar{\Delta V} = \Delta V_{re} + j\Delta V_{im} \tag{25}$$

Así, la ecuación (22) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$R \Delta P + X \Delta Q = \Delta V_{re} \tag{26}$$

$$X \Delta P - R \Delta Q = \Delta V_{im} \tag{27}$$

Donde  $\Delta V_{re}$  y  $\Delta V_{im}$  son la parte real e imaginaria de los voltajes; sin embargo por las consideraciones anteriores respecto al voltaje, se asume que  $\Delta V_{re} \approx \Delta V$  y  $\Delta V_{im} \approx \Delta \delta$ , donde  $\Delta V$  es el vector de diferencia entre las magnitudes de los voltajes de los puntos de quiebre y  $\Delta \delta$  la diferencia entre sus ángulos de fase. Finalmente las ecuaciones (26) y (27) son expresadas en una forma más compacta, con lo que se obtiene la forma equivalente de la ecuación (19) de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} X & R \\ -R & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q \\ \Delta P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta \delta \end{bmatrix} \tag{28}$$

La matriz compuesta por los elementos  $X$  y  $R$  representa la matriz de puntos de quiebre o matriz de impedancia, y el vector compuesto por los elementos  $\Delta P$  y  $\Delta Q$  representan el vector de corrección de inyecciones de potencia activa y reactiva, respectivamente. El vector compuesto por los elementos  $\Delta V$  y  $\Delta \delta$  es el vector de la diferencia de voltaje de los puntos de quiebre, tanto en magnitud como en ángulo, respectivamente. Este proceso consiste en calcular el flujo de carga de la red radial. Como condición inicial el valor de las inyecciones de potencia activa y reactiva en los puntos de quiebre son iguales a cero. Una vez que se obtienen los voltajes de los nodos del sistema se calcula el vector de diferencias de voltajes en los puntos de quiebre.

Luego se verifica si el máximo valor de este vector es menor o igual a un criterio de convergencia establecido; en caso contrario se debe actualizar el vector de inyecciones de potencia, multiplicando la inversa de la matriz de puntos de

quiebre por el vector de diferencias de voltajes en los puntos de quiebre. Una vez actualizadas las inyecciones de potencia se vuelve a solucionar el flujo de carga radial y se repite dicho proceso hasta que se cumpla el criterio de convergencia.

### III. FLUJO DE CARGA PROBABILÍSTICO

El problema del flujo de carga probabilístico consiste en determinar las condiciones de operación de estado estable de un sistema de potencia bajo la incertidumbre de ciertos parámetros como la demanda y la generación.

Matemáticamente el problema del flujo de carga probabilístico puede ser representado como: una función vectorial donde el vector de variables de entrada consiste en las demandas de todos los nodos (excepto el slack), además de la generación distribuida que pueda existir en el sistema de distribución, el vector de variables de salida  $z$  que consiste en los voltajes y ángulos de todos los nodos (excepto en el nodo slack) y todos los flujos por las líneas. De hecho, desde una perspectiva más amplia, la solución  $z$  es afectada por cada factor de entrada que es capaz de modificar las condiciones de operación de estado estable del sistema de potencia. Si se denota el conjunto de factores como  $p$ , entonces se tiene que  $z=H(p)$ .

La notación del flujo de carga probabilístico viene de la consideración de la incertidumbre en los datos de entrada, es decir, el vector de entrada  $p$ . Dicha incertidumbre es transferida al vector de salida  $z$  mediante la función  $H(\cdot)$ . De esta manera tanto el vector de entrada  $p$  como el vector de salida  $z$  son tratados como vectores de variables aleatorias. Como resultado, el objetivo del análisis del flujo de potencia probabilístico es caracterizar el comportamiento aleatorio de la solución  $z$  a partir de la información estadística de  $p$ .

A continuación se describen los siguientes métodos: simulación de Montecarlo, estimación por dos puntos y estimación por tres puntos.

#### A. Simulación de Montecarlo

El método de simulación de Montecarlo no es determinístico y es usado para aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud. Proporciona soluciones aproximadas a una gran variedad de problemas matemáticos posibilitando la realización de experimentos con muestreos de números aleatorios en una computadora.

Por definición una simulación de Montecarlo es el experimento de generación de números aleatorios de una distribución de probabilidad, para evaluar en forma numérica un modelo matemático que permita estimar el comportamiento de un sistema que involucra variables estocásticas. Entre mayor sea la cantidad de iteraciones o realizaciones, mayor será la estabilidad de la simulación; es

decir, el conjunto de observaciones de la salida bajo estudio se estabilizará sobre una misma distribución.

El procedimiento de simulación realizado en este artículo es el siguiente:

- i. Generar una muestra de variables de entrada aleatorias  $p$ ; en este artículo las variables de entrada son las demandas de potencia activa y reactiva en los nodos del sistema y la potencia inyectada por los generadores.
- ii. Resolver el flujo de carga para el sistema (método de la regla de la cadena).
- iii. Almacenar las variables de salida de la iteración; en este caso, las variables de estado del sistema (voltajes nodales).
- iv. Se repiten los pasos de i a iii hasta cumplir con el criterio de convergencia; en este caso el criterio se logra al alcanzar un número específico de iteraciones.
- v. Una vez terminada la simulación, se pueden calcular las estadísticas descriptivas de la muestra de datos (valor promedio y desviación), o ajustar a una distribución de probabilidad.

#### B. Estimación por dos puntos

Los métodos de estimación por puntos concentran la información estadística proporcionada por los primeros momentos centrales de  $m$  variables aleatorias de entrada en  $K$  puntos para cada variable, llamadas concentraciones. Mediante el uso de estos puntos y la función que relaciona las variables de entrada y salida, la información sobre la incertidumbre asociada con variables aleatorias de salida del problema puede ser obtenida.

La  $K_{ésima}$  concentración  $(p_{1,k}, w_{1,k})$  de cada variable aleatoria  $m$  puede ser definida como un par compuesto por una ubicación  $p_{1,k}$  y un peso  $w_{1,k}$  ( $k=1, 2, \dots, K$ ). La ubicación  $p_{1,k}$  es el  $K_{ésimo}$  valor de la variable  $m$  en el que se evalúa la función  $F$ . El peso  $w_{1,k}$  es un factor de ponderación que representa la importancia relativa de esta evaluación en las variables aleatorias de salida.

Mediante el uso de métodos de Hong de punto estimado [16], la función  $H$  tiene que ser evaluada solo  $K$  veces para cada variable aleatoria de entrada  $m$ . Dichas evaluaciones consisten en utilizar los puntos definidos por la ubicación  $p_{1,k}$  para la variable de entrada que se está evaluando y las medias  $\mu$  de las  $m-1$  restantes variables de entrada, es decir, en el punto  $(\mu_{p1}, \mu_{p2}, \dots, p_{1,k}, \dots, \mu_{pm})$  en el cual se resolverá el problema determinístico. En otras palabras, el problema determinístico tiene que ser resuelto  $K$  veces para cada variable aleatoria de entrada  $m$ . El número  $K$  de evaluaciones a realizar depende del esquema utilizado. Por lo tanto, el número total de evaluaciones de  $F$  es  $K \times m$ .

Mediante el procedimiento desarrollado en [16] las  $K$  concentraciones  $(p_{1,k}, w_{1,k})$  de las  $m$  variables aleatorias de

entrada son obtenidas de los datos estadísticos de entrada, así la ubicación  $p_{1,k}$  y el peso  $w_{1,k}$  a ser determinados se calculan mediante el procedimiento descrito a continuación.

Se asume que  $p_1$  es una variable aleatoria de entrada con una función de densidad de probabilidad  $f_{p_1}(p_1)$ , una media  $\mu_{p_1}$  y una desviación estándar  $\sigma_{p_1}$ . Además  $Z$  es una variable aleatoria que es función de  $p_1$ . De esta forma  $Z=h(p_1)$  en la mayoría de los problemas reales es una función no lineal; sin embargo puede ser aproximada usando la expansión de la serie de Taylor alrededor de un punto de interés. En este caso la expansión se realizará alrededor del valor de la media  $\mu_{p_1}$ , de la siguiente forma:

$$h(p_1) = h(\mu_{p_1}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} h^{(i)}(\mu_{p_1})(p_1 - \mu_{p_1}) \quad (29)$$

Por otra parte cada una de las  $K$  concentraciones de la variable  $Z$  son definidas por su ubicación  $p_{1,k}$  y su peso o probabilidad  $w_{1,k}$ . De esta forma el valor aproximado de  $\mu_Z$  usando las  $K$  probabilidades de las concentraciones es:

$$\mu_Z \cong \sum_{k=1}^K w_k h(p_{1,k}) \quad (30)$$

La ubicación a ser determinada es:

$$p_{1,k} = \mu_{p_1} + \xi_{1,k} \sigma_{p_1} \quad (31)$$

Donde  $\xi_{1,k}$  corresponde a las ubicaciones estándar y son constantes a determinar. La idea básica es obtener el momento estadístico  $\mu_Z$  para poder calcular  $p_{1,k}$  y  $w_{1,k}$ , para lo cual se usan dos aproximaciones con el fin de construir un conjunto de ecuaciones en términos de estos valores. La primera aproximación consiste en calcular  $\mu_Z$  mediante la definición del valor esperado de la función  $h(p_1)$ :

$$\mu_Z = E(h(p_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(p_1) f(p_1) d_{p_1} \quad (32)$$

Sustituyendo (29) en (32) se tiene que:

$$\mu_Z = h(\mu_{p_1}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} h^{(i)}(\mu_{p_1}) M_i(p_1) \quad (33)$$

Donde  $M_i(p_1)$  denota el  $i$ ésimo momento central de  $p_1$  el cual está definido por:

$$M_i(p_1) = \int_{-\infty}^{\infty} (p_1 - \mu_{p_1})^i f_{p_1}(p_1) d_{p_1} \quad (34)$$

La proporción  $\lambda_{p_1,i} = M_i(p_1) / \sigma_{p_1}^i$  permite encontrar unos factores ampliamente usados en los análisis probabilísticos los cuales se denotan como el  $i$ ésimo momento central estándar de la variable aleatoria  $p_1$ . De esta manera la ecuación (33) puede ser reescrita como función de estos factores:

$$\mu_Z = h(\mu_{p_1}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} h^{(i)}(\mu_{p_1}) \lambda_{p_1,i} \sigma_{p_1}^i \quad (35)$$

Donde el primer y segundo momento central alrededor de la media son  $\lambda_{p_1,1}=0$  y  $\lambda_{p_1,2}=1$  respectivamente, y el tercer y cuarto momento central alrededor de la media  $\lambda_{p_1,3}$  y  $\lambda_{p_1,4}$  son el coeficiente de Asimetría y Kurtosis de  $p_1$ , respectivamente.

La segunda aproximación consiste en usar las ecuaciones (29) y (31), y sustituirlas en (30) para obtener la ecuación (36):

$$\begin{aligned} w_{1,1} h(p_{1,1}) + \dots + w_{1,K} h(p_{1,K}) = \\ h(\mu_{p_1})(w_{1,1} + \dots + w_{1,K}) + \dots \\ \dots + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} h^{(i)}(\mu_{p_1})(w_{1,1} \xi_{1,1}^i + \dots + w_{1,K} \xi_{1,K}^i) \end{aligned} \quad (36)$$

Igualando los términos de la derecha de las ecuaciones (35) y (36) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K w_{1,k} (\xi_{1,k})^i = \lambda_{1,i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, 2K - 1 \\ \sum_{k=1}^K w_{1,k} = \frac{1}{m} \end{aligned} \quad (37)$$

Donde  $\xi_{1,k}$  es la ubicación estándar, y  $\mu_{p_1}$  y  $\sigma_{p_1}$  son la media y la desviación estándar de la variable aleatoria de entrada  $p_1$ . De esta manera la ubicación estándar  $\xi_{1,k}$  y el peso  $w_{1,k}$  son obtenidos resolviendo el sistema no lineal de ecuaciones de (37), el cual puede ser eficientemente resuelto por el procedimiento desarrollado por Miller y Rice en [25]. Una vez obtenidas todas las concentraciones  $(p_{1,k}, w_{1,k})$ , la función  $H$  es evaluada en los puntos  $(\mu_{p_1}, \mu_{p_2}, \dots, p_{1,k}, \dots, \mu_{p_m})$  obteniendo  $Z(1,k)$ , donde  $Z$  es el vector de variables aleatorias de salida. Finalmente, usando los factores de peso  $w_{1,k}$  y los valores de  $Z(1,k)$ , el  $j$ ésimo momento de las variables aleatorias de salida puede ser estimado como sigue:

$$E[Z^j] \cong \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^K w_{1,k} (Z(1,k))^j \quad (38)$$

### C. Estimación por tres puntos

Este esquema surge al resolver la ecuación (37) para  $K=3$  y fijando una de las ubicaciones de las concentraciones a su valor medio. De esta manera solamente se necesitan los primeros 4 momentos centrales de la función de densidad de probabilidad marginal de las variables aleatorias de entrada. La solución de este sistema es:

$$\xi_{1,k} = \frac{\lambda_{1,3}}{2} + (-1)^{3-k} \sqrt{\frac{\lambda_{1,4}}{2} - \frac{3}{4} \lambda_{1,3}^2} \quad k = 1, 2 \quad (39)$$

$$\xi_{1,3} = 0 \quad (40)$$

$$w_{1,k} = \frac{(-1)^{3-k}}{\xi_{1,k}(\xi_{1,1} - \xi_{1,2})} \quad k = 1, 2 \quad (41)$$

$$w_{1,3} = \frac{1}{m} - \frac{1}{\lambda_{1,4} - \lambda_{1,3}^2} \quad (42)$$

Es de notar que al hacer  $\xi_{1,3}=0$  ocasiona que  $p_{1,3} = \mu_{pl}$ , haciendo que  $m$  de las  $3m$  concentraciones estén localizadas en el mismo punto ( $\mu_{p1}, \mu_{p2}, \dots, \mu_{pl}, \dots, \mu_{pm}$ ). Por lo tanto es suficiente evaluar la función  $H$  en esta ubicación una sola vez, con la condición de que el correspondiente peso  $w_{1,3}$  se actualice al valor  $w_0$ . Por lo tanto:

$$w_0 = \sum_{l=1}^m w_{1,3} = 1 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{\lambda_{1,4} - \lambda_{1,3}^2} \quad (43)$$

Es por esta razón que este esquema es conocido como  $2m+1$  a pesar del hecho de que usa 3 puntos por cada variable de entrada. Además las aproximaciones de la media y la desviación estándar de  $z$  denotada por  $\mu_{z_i}$  y  $\sigma_{z_i}$  se pueden obtener como:

$$\mu_{z_i} = E[z_i] + \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^3 w_{1,k} Z_i(l, k) \quad (44)$$

$$E[z_i^2] = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^3 w_{1,k} (Z_i(l, k))^2 \quad (45)$$

$$\sigma_{z_i} = \sqrt{E[z_i^2] - (E[z_i])^2} = \sqrt{E[z_i^2] - \mu_{z_i}^2} \quad (46)$$

#### IV. APLICACIÓN Y RESULTADOS

Con el fin de probar las tres metodologías propuestas, en este trabajo se empleó un sistema de distribución levemente enmallado de 69 nodos usado en [5], cuyo voltaje nominal es 12.66 kV (ver figura 4). En este sistema los generadores distribuidos son eólicos. Se empleó una función de distribución normal para modelar las cargas. La implementación y aplicación de las metodologías se desarrolló en Matlab. Las tolerancias del flujo de carga poco enmallado y las del flujo de carga radial son 0.0001 y 0.000001 respectivamente. Dado que la simulación de Montecarlo (SM) es el método que tradicionalmente se ha empleado en el flujo de carga probabilístico, este se compara con los métodos de dos puntos (M2P) y tres puntos (M3P) para verificar la efectividad y desempeño de todos los métodos. En las tablas 2 y 3 se presentan las diferencias de la media y la desviación estándar, respectivamente.

Método	Potencia activa	Potencia reactiva	Magnitud del voltaje	Ángulo del voltaje
M2P y SM	0.04444	0.02777	0.49889	0.00986
M3P y SM	0.00450	0.00079	0.00145	0.00082

Tabla 2. Diferencias de la media entre flujos probabilísticos

Método	Potencia activa	Potencia reactiva	Magnitud del voltaje	Ángulo del voltaje
M2P y SM	2.20567	5.47261	3.64239	1.77035
M3P y SM	3.59733	0.14897	1.30675	1.10011

Tabla 3. Diferencias de la desviación estándar entre flujos probabilísticos

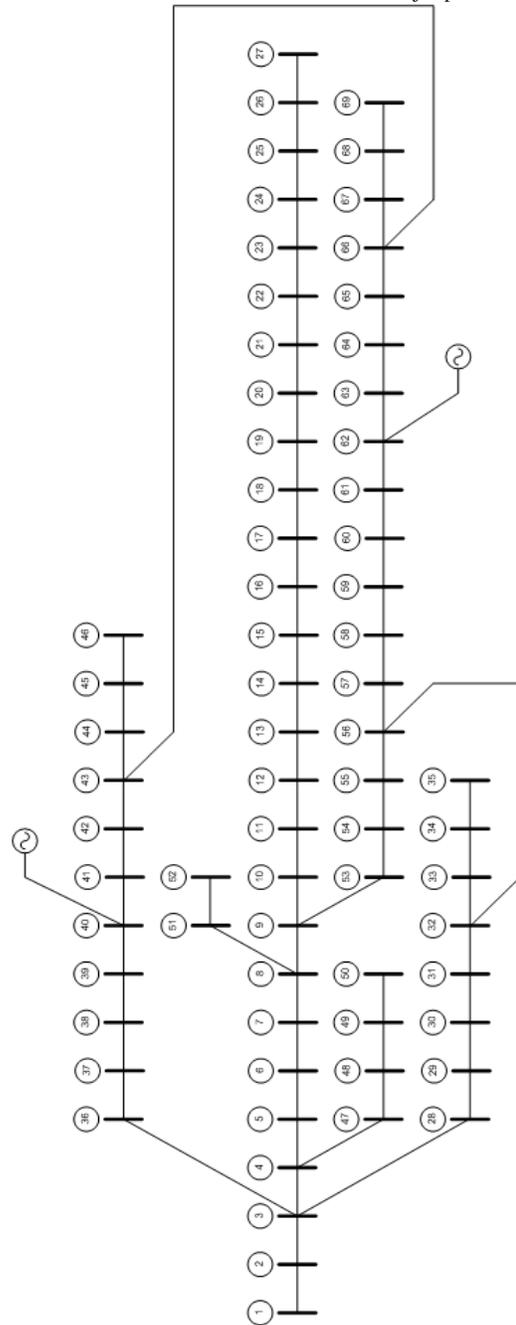


Figura 4. Sistema de prueba

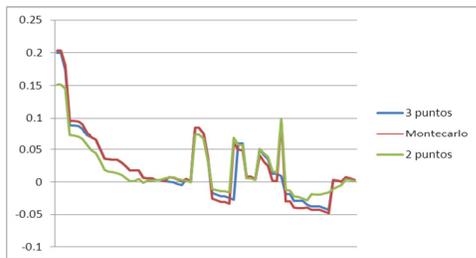


Figura 5. Comparación de la media de P

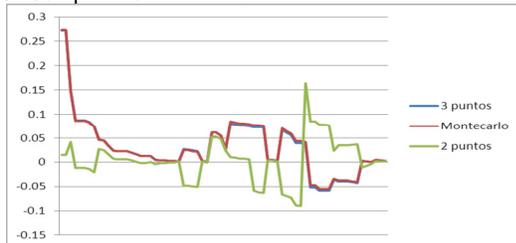


Figura 6. Comparación de la media de Q

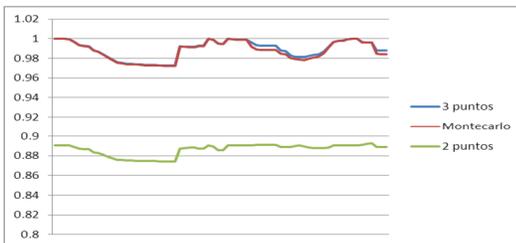


Figura 7. Comparación de la media de V

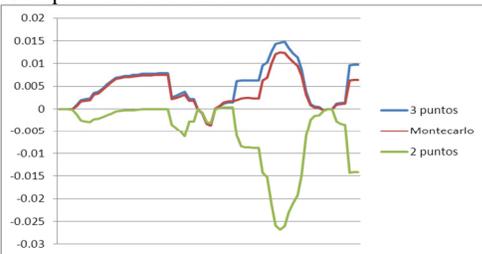


Figura 8. Comparación de la media de A

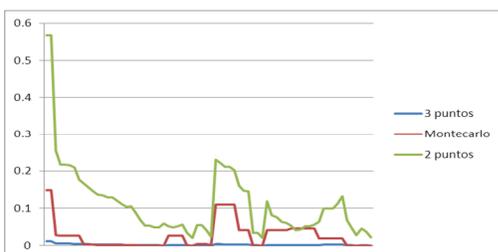


Figura 9. Comparación de la desviación estándar de P

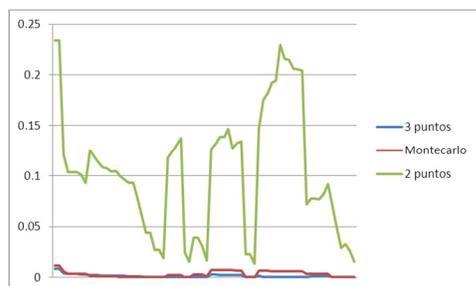


Figura 10. Comparación de la desviación estándar de Q

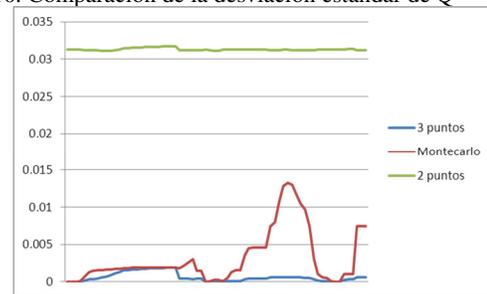


Figura 11. Comparación de la desviación estándar de V

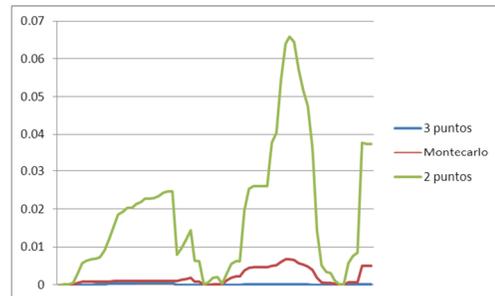


Figura 12. Comparación de la desviación estándar de A

Se puede observar en las tablas 2 y 3 que el método de estimación por 3 puntos presenta mejores soluciones en comparación con el de 2 puntos, con la ventaja de que sólo realiza una iteración más; adicionalmente las respuestas en comparación con el método de Montecarlo son muy parecidas y la cantidad de casos es de 101 y 10.000 respectivamente. Esto se puede observar claramente en las figuras 5 a 12, en las cuales se comparan los resultados obtenidos por los tres métodos, tanto para potencia activa (P), potencia reactiva (Q), magnitud del voltaje (V) y ángulo del voltaje (A) en todos los nodos. En las figuras 5 a 12 se aprecia cada nodo del sistema (eje horizontal) con su respectivo valor (eje vertical). Se aprecia que el método de estimación por 3 puntos es el que se acerca más a la simulación de Montecarlo.

## V. CONCLUSIONES

La metodología usada para el análisis probabilístico es aplicable tanto para redes con topología radial como redes poco enmalladas, y además en sistemas que incluyan generación distribuida.

Resulta atractivo el uso del método de estimación por 3 puntos ya que con él se logran soluciones muy buenas comparándolas con la simulación de Montecarlo, evaluando una cantidad mucho menor de flujos determinísticos (aproximadamente el 1%).

Ya que el flujo de carga radial que se basa en el método de la cadena trabaja con una matriz Jacobiana del sistema, la cual se calcula una única vez y no cambia a través de todo el proceso (siempre y cuando no cambie la topología de la red), el tiempo computacional de éste flujo es menor respecto a otras versiones de flujos de carga empleados en distribución.

Por esta razón el hecho de tener que evaluar muchos flujos de carga (ya sea con la simulación de Montecarlo o el de estimación por puntos) representa una ventaja para el flujo de carga radial que usa el método de la cadena, resultando ser más rápido en comparación con otros métodos, cuando se aumenta la cantidad de flujos de carga que deban evaluarse.

Debido a las propiedades numéricas del Jacobiano el flujo de potencia descrito es numéricamente robusto e independiente de los parámetros del sistema, en particular a la relación R/X del sistema.

Con la modificación propuesta al flujo de carga radial del método de la cadena este se vuelve más eficiente ya que una vez que una rama en particular ha llegado a la convergencia se hace a un lado del proceso de solución evitando el cálculo de dicha rama, reduciendo de esta manera el esfuerzo computacional del algoritmo.

#### REFERENCIAS

- [1] W.D. Stevenson and J.J. Grainger, *Análisis de Sistemas de Potencia*, México: Mc Graw Hill, 1997.
- [2] W.H. Kersting, *Distribution System Modeling and Analysis*, New York: CRC Press LLC, 2000.
- [3] C.S. Cheng, D. Shirmohammadi, "A three-phase power flow method for real-time distribution system analysis," *IEEE Trans. Power Systems*, 10 (2), pp. 671-679, 1995.
- [4] R. Céspedes, "New method for the analysis of distribution networks," *IEEE Trans. Power Delivery*, 5 (1), pp. 391-396, 1990.
- [5] M. Baran, F. Wu. "Optimal Sizing of Capacitors Placed on a Radial Distribution System," *IEEE Trans. Power Delivery*, 4 (1), pp. 735-743, 1989.
- [6] B. Borkowska, "Probabilistic load flow," *IEEE Trans. Power App. Syst.*, PAS-93 (3), pp. 752-759, 1974.
- [7] J.M. Morales, L. Baringo, A.J. Conejo and R. Mínguez, "Probabilistic power flow with correlated wind sources," *Generation, Transmission & Distribution IET*, 4 (5), pp. 641-651, 2010.
- [8] R.N. Allan, A.M Da Silva and R.C. Burchett, "Evaluations methods and accuracy in probabilistic load flow solutions," *IEEE Trans. Power App. Syst.*, PAS-100 (5), pp. 2539-2546, 1981.
- [9] P. Zhang, S.T. Lee, "Probabilistic load flow computation using the method of combined cumulants and Gram-Charlier expansion," *IEEE Trans. Power Syst.*, 19 (1), pp. 676-682, 2004.
- [10] L.A. Sanabria, T.S. Dillon, "Stochastic power flow using cumulants and von Mises functions," *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, 8 (1), pp. 47-60, 1986.
- [11] J.M. Morales, J.P. Ruiz, "Point estimated schemes to solve the probabilistic power flow," *IEEE Trans. Power Systems*, 22 (4), pp. 1594-1601, 2007.
- [12] C.A. Peñuela, M. Granada, J.R.S. Mantovani, "Probabilistic Analysis of the Distributed Power Generation in Weakly Meshed Distribution Systems," in *2010 IEEE LA Transmission and Distribution Conference and Exposition*, pp. 171-177.
- [13] V. Miranda, M.A. Matos and J.T. Saraiva, "Fuzzy load flow new algorithms incorporating uncertain generation and load representation," in *Proc. Tenth Power System Computation Conf.*, Graz, Austria, 1990, pp. 621-627.
- [14] R.Y. Rubinstein and D.P. Kroese, *Simulation and the Monte Carlo method*, New York: John Wiley and Sons, 1981.
- [15] C.L. Su, "Probabilistic load flow computation using point estimate method," *IEEE Trans. Power Syst.*, 20 (4), pp. 1843-1851, 2005.
- [16] H.P. Hong, "An efficient point estimate method for probabilistic analysis," *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, 59, pp. 261-267, 1998.
- [17] D. Shirmohammadi, H.W. Hong, A. Semlyen and G.X. Luo, "A Compensation-Based Power Flow Method for Weakly Meshed Distribution and Transmission Networks," *IEEE Transactions on Power Systems*, 3 (2), pp. 753-762, 1988.
- [18] G.X. Luo, A. Semlyen, "Efficient load flow for large weakly meshed networks," *IEEE Transactions on Power Systems*, 5 (4), pp. 1309-1316, 1990.
- [19] D. Rajcic, R. Ackovski and R. Taleski, "Voltage correction power flow," *IEEE Transactions on Power Delivery*, 9 (2), pp. 1056-1062, 1994.
- [20] Y. Zhu, K. Tomsovic, "Adaptive Power Flow Method for Distribution Systems with Dispersed Generation," *IEEE Trans. Power Delivery*, 17 (3), pp. 1-7, 2002.
- [21] W. El-Khattam, Y.G. Hegazy, M.M. Salama, "Investigating distributed generation systems performance using Monte Carlo simulation," *Power Systems, IEEE Trans. Power Syst.*, 21 (2), pp. 524-532, 2006.
- [22] J.S. Giraldo, J.A. Castrillón, M. Granada, "Stochastic AC optimal power flow considering the probabilistic behavior of the wind, loads and line parameters," *Revista Ingeniería Investigación y Tecnología*, pp. 1-13, Octubre de 2012.
- [23] R. Zhouyang, Y. Wei, Z. Xia, L. Yiming, J. Yu, "Probabilistic power flow for distribution networks with photovoltaic generators," *Power and Energy Society General Meeting (PES)*, pp. 1-5, 2013.
- [24] C.A. Peñuela, M. Granada, J. R. Sanchez, "Probabilistic Algorithms for Power Load Flow and Short-Circuit Analysis in Distribution Networks with Dispersed Generation," *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 24 (1), pp. 324-338, 2013.
- [25] A. C. Miller, T. R. Rice, "Discrete approximations of probability distributions," *Management Science*, 29 (3), pp. 352-362, 1983.