

Control adaptativo por planos deslizantes

Adaptive control by sliding planes

Debbie Arredondo-Arteaga¹, Didier Giraldo-Buitrago²

¹Ingeniería eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.

²Ingeniero eléctrico, Ingeniería eléctrica, Docente, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia

djarredondo@utp.edu.co

dgiraldo@utp.edu.co

Resumen— Este artículo presenta el diseño de un controlador por modos deslizantes adaptativo debido al uso de metodologías de identificación en línea, el cual se implementa en algunas simulaciones y por último en una planta física.

Palabras clave— controlador, modos deslizantes, adaptativo.

Abstract— this paper presents the design of an adaptive sliding mode controller using identification online techniques, and is implemented in some simulations and in a physical plant.

Key Word — controller, sliding modes, adaptive control.

I. INTRODUCCIÓN

La técnica de control planos deslizantes es una metodología inventada en la antigua unión soviética y basada en gran medida en el concepto de estabilidad de Lyapunov, hecho por el cual es ampliamente usada gracias a que garantiza la estabilidad de los sistemas físicos.

La estabilidad de los sistemas de control es uno de los puntos más importantes para lograr un control adecuado. Esta técnica hace que se genere un plano por el cual se deslizarán las variables de estado del sistema, haciendo que se mitiguen las condiciones iniciales (generando estabilidad según el criterio de Lyapunov) y llevando el sistema hasta el punto deseado (Referencia).

La aplicación de este método se hace teniendo en cuenta la generación del plano adecuado y como se espera que sea adaptativo se identificará la planta por algunos métodos de estimación paramétrica con lo cual se modificará la ley de control en cada iteración [1][2][3][4].

II. CONTENIDO

Para el diseño formal de un controlador por modos deslizantes se inicia pensando en la base fundamental del control clásico que es la descripción matemática del sistema, por lo tanto se debe plantear primero un modelo, segundo entender en que se basa la estabilidad según Lyapunov y cómo de esta se llega al control por modos deslizantes, tercero la estimación paramétrica tanto fuera de línea como en línea y por último la agrupación de todas las anteriores para hacer un control por planos deslizantes adaptativo [1][6].

III. MODELO DEL SISTEMA

El modelo usado para la validación del control por planos deslizantes [1], es un sistema basado en un servomotor con poleas y engranajes, el objetivo es el control de posición del último engranaje el cual tiene un sensor de posición angular acoplado. Un diagrama aproximado de la planta se muestra en la Fig.1.

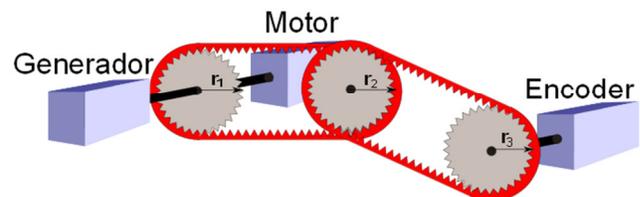


Fig.1 Diagrama aproximado de la planta a controlar.

En Fig.1 se muestra el motor al cual se le aplicará la señal de control por modo deslizante para lograr el ángulo deseado en el engranaje de radio (r_3) y será medida con el “encoder” (sensor de posición) acoplado en ese piñón.

El primer problema para un control adecuado es obtener el modelo matemático del sistema [6] y debido a que no se poseen los parámetros como la fricción, la constante de elasticidad de las bandas, el radio de los engranajes, los parámetros del motor y del sensor, se debe utilizar teorías de estimación paramétrica [5][7][8].

Como primer paso se hace una descripción matemática del sistema y se determina el orden de la función de transferencia (determinación de los polos dominantes) utilizando las leyes de Newton.

Haciendo una mejor aproximación del sistema mostrado en la Fig.1 se muestran los torque en Fig.2.

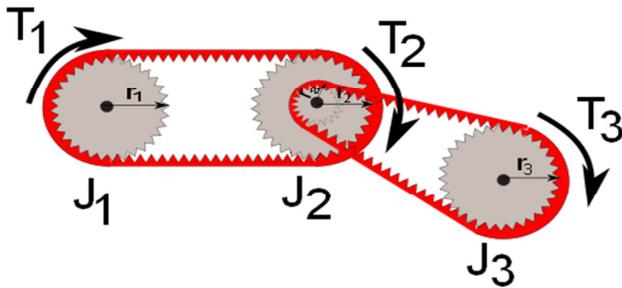


Fig.2 Sistema de engranajes para control de posición

Puesto que el torque que genera el motor debe de ser igual a la suma de torques que se producen en los piñones se tiene la ecuación (1) (la suma es hecha en el piñón 1).

$$\tau_m = \tau_1 + \tau_2' + \tau_3' \tag{1}$$

Reescribiendo esta ecuación se tiene la ecuación (2), donde \$J_1, J_2, J_3\$.son las inercias asociadas a los piñones.

$$\tau_m = J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} \frac{r_1}{r_2} + J_3 \frac{d^2\theta_3}{dt^2} \frac{r_1 r_a}{r_2 r_3} \tag{2}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (2), con condiciones iniciales iguales a cero se tiene la ecuación (3)

$$T_m(s) = J_1 s^2 \theta_1 + J_2 s^2 \theta_2 \frac{r_1}{r_2} + J_3 s^2 \theta_3 \frac{r_1 r_a}{r_2 r_3} \tag{3}$$

Por las relaciones en los engranajes se pueden encontrar las ecuaciones (4) y (5).

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{d\theta_3}{dt} \frac{r_3}{r_a} \tag{4}$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta_3}{dt} \frac{r_2 r_3}{r_1 r_a} \tag{5}$$

Al aplicar Laplace en las relaciones (4) y (5) se tienen las relaciones (6) y (7).

$$\theta_2 = \theta_3 \frac{r_3}{r_a} \tag{6}$$

$$\theta_1 = \theta_3 \frac{r_2 r_3}{r_1 r_a} \tag{7}$$

Reemplazando las relaciones (6) y (7) en la ecuación (3) se encuentra la ecuación (8).

$$T_m(s) = J_1 s^2 \theta_3 \frac{r_2 r_3}{r_1 r_a} + J_2 s^2 \theta_3 \frac{r_3 r_1}{r_a r_2} + J_3 s^2 \theta_3 \frac{r_1 r_a}{r_2 r_3} \tag{8}$$

El torque del servomotor está dado por la relación (9).

$$T_m(s) = K_T I_a(s) \tag{9}$$

Donde \$I_a(s)\$ es la corriente de la armadura para campo constante y \$K_T\$ es la constante de torsión asociada al servo.

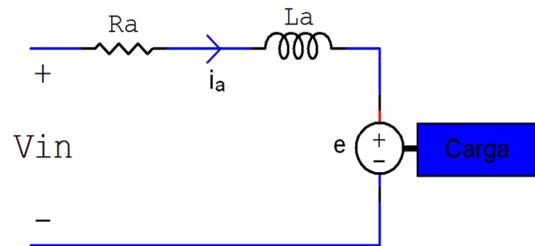


Fig.3 Diagrama aproximado para servomotor

Del modelo circuital del servo mostrado en la Fig.3 se obtiene la ecuación (10) en el dominio de Laplace, la cual describe aproximadamente la dinámica del motor.

$$V_{in}(s) = R_a I_a + L_a s I_a + e(s) \tag{10}$$

La relación (9) se reemplaza en la ecuación (10).

$$V_{in}(s) = R_a \frac{T_m(s)}{K_T} + L_a s \frac{T_m(s)}{K_T} + e(s) \tag{11}$$

Del voltaje inducido del servo se tiene que:

$$e(s) = K_m s \theta_3 \frac{r_2 r_3}{r_1 r_a} \tag{12}$$

Reemplazando en la ecuación (11) la ecuación (12)

$$V_{in}(s) = R_a \frac{T_m(s)}{K_T} + L_a s \frac{T_m(s)}{K_T} + K_m s \theta_3 \frac{r_2 r_3}{r_1 r_a} \tag{13}$$

Despejando de la ecuación (13), se obtiene la función de transferencia deseada (14).

$$\frac{\theta_3(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\frac{K_T}{L_a} [J_1 \frac{r_2 r_3}{r_1 r_a} + J_2 \frac{r_3 r_1}{r_a r_2} + J_3 \frac{r_1 r_a}{r_2 r_3}]}{s^3 + \frac{R_a}{L_a} s^2 + \frac{K_m K_t}{L_a} \frac{r_1 r_a}{[J_1 \frac{r_2 r_3}{r_1 r_a} + J_2 \frac{r_3 r_1}{r_a r_2} + J_3 \frac{r_1 r_a}{r_2 r_3}]} s} \quad (14)$$

Dónde
 $\sigma(x)$ Plano de deslizamiento
 C_n Constates del plano
 x_n Variables de estado

Los polos característicos del sistema son el principal objetivo, debido a que no se conocen los parámetros de la función de transferencia entonces se debe estimar cada uno de ellos [7][8].

IV. ESTABILIDAD SEGÚN LYAPUNOV Y MODOS DESLIZANTES

La teoría de estabilidad toma como referencia principal la teoría de Lyapunov debido a que propuso unas metodologías básicas para la determinación de la misma (estas se conocen como el método directo e indirecto) [1].

La metodología indirecta, se basa en la construcción de la función de transferencia del sistema y la determinación de los polos del mismo, si estos se encuentran en el semiplano complejo izquierdo se define que el sistema es estable.

En la metodología directa se debe construir una función la cual se llama función de Lyapunov, entonces si esta función se puede definir y cumple con tres reglas entonces se define que el sistema es estable.

Las tres condiciones de estabilidad son las siguientes:

- 1- $V(\hat{x})=0$
- 2- $V(x) > 0$ para todo $x \neq \hat{x}$
- 3- $\dot{V}(x) < 0$ a lo largo de las trayectorias de $\dot{x} = f(x)$

Dónde:

$V(\hat{x})$ Es la función de Lyapunov evaluada en el punto de equilibrio.

$V(x)$ Es la función de Lyapunov evaluada en cualquier punto diferente al de equilibrio.

$\dot{x} = f(x)$ Definición del sistema.

Por medio del método directo de Lyapunov se puede llegar a la definición principal de planos deslizantes así:

Se define un plano de deslizamiento (15) que pase por el origen para que las condiciones iniciales del sistema sean deslizadas hasta este punto.

$$\sigma(x) = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$$

$$\sigma(x) = [C_1 C_2 \dots C_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

Definiendo una función candidata de Lyapunov como (16).

$$V(x) = \frac{\sigma(x)^2}{2} \quad (16)$$

Como se puede ver esta función cumple las dos primeras condiciones de estabilidad, pero para el cumplimiento de la tercera condición se debe hacer un cálculo mucho mayor.

Teniendo una planta de la forma (17).

$$\dot{x} = Ax + Bu + d \quad (17)$$

Donde A , B son conocidas y d son las perturbaciones del sistema donde $|d| \leq d_{max}$.

Derivando la función de Lyapunov (16) se obtiene (18). Se demostrará la tercera condición de estabilidad.

$$\dot{V}(x) = \sigma(x)\dot{\sigma}(x) \quad (18)$$

Si se reemplaza (15) en (18) se obtiene (19)

$$\dot{V}(x) = \sigma(x)p^T \dot{x} \quad (19)$$

Reemplazando (17) en (19) se obtiene (20)

$$\dot{V}(x) = \sigma(x)(p^T Ax + p^T Bu + p^T d) \quad (20)$$

Entonces para alcanzar la condición de estabilidad, la ecuación (20) debe ser menor que cero para todos los casos menos en el punto de equilibrio; para cumplir esta condición lo primero será igualarlo a cero y después encontrar como hacer la expresión menor que cero.

$$0 = \sigma(x)(p^T Ax + p^T Bu + p^T d) \quad (21)$$

De la expresión (21) se puede despejar una ley de control tal que obligue a que la derivada sea igual a cero como (22)

$$u = -\frac{p^T Ax}{p^T B} - \frac{p^T d}{p^T B} \quad (22)$$

La ley de control mostrada en (22) aún no garantiza estabilidad debido a que la función no es menor que cero en todos los casos, se debe buscar entonces una función que cumpla.

$$u = -\frac{p^T Ax}{p^T B} - \frac{p^T d_{max} + \mu}{p^T B} \text{sign}(\sigma) \quad (23)$$

La ecuación (23) asegura estabilidad según el criterio de Lyapunov, debido a que cumple con la última condición de estabilidad. Reemplazando (23) en (20) se obtiene (24).

$$\dot{V}(x) = -p^T (|\sigma| d_{max} - \sigma d) - |\sigma| \mu \quad (24)$$

Se nota que (24) es negativa para cualquier valor, y la ley de control (23) es una ley de control deslizante debido a la función signo, que hace que la señal conmute a través del plano [2][3].

V. ESTIMACIÓN PARAMÉTRICA

La teoría de estimación paramétrica es muy variada, pero de esta se alcanzan a vislumbrar dos grandes grupos; la estimación en línea que se basa en la estimación recursiva de los parámetros del sistema hecho en cada iteración o cada cierto número de iteraciones y la estimación fuera de línea la cual calcula los parámetros del sistema antes de aplicar el control (sólo se estima una vez).

La estimación de los parámetros se basa principalmente en una minimización del error medio cuadrático de los datos, para así tener la mejor aproximación del sistema.

Si se tiene un sistema el cual se puede representar como (25).

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2} + \dots + b_{n-1} z^{-n}}{1 + a_0 z^{-1} + \dots + a_{n-1} z^{-n}} \quad (25)$$

Entonces se puede llegar a la ecuación (26)

$$Y = H\theta \quad (26)$$

Dónde:

Y Es el vector de salidas del sistema

θ Es el vector de parámetros a estimar

H Es una matriz cuadrada de k (muestras) filas y $2n$ columnas

n Orden del sistema

Entonces la estimación de los parámetros θ esta dado por (27).

$$(H^T H)^{-1} H^T Y = \theta \quad (27)$$

La ecuación (27) se le llama estimación fuera de línea por mínimos cuadrados, pero también se pueden usar metodologías como redes neuronales (estas funcionan tanto fuera de línea como en línea) [3].

Para la estimación en línea hay mucha diversidad en metodologías pero la utilizada en este artículo es estimación por proyección [7] [8].

De la ecuación (26), y después de un proceso de optimización se encuentra la ecuación para la estimación en línea (28).

$$\hat{\theta} = \hat{\theta} + \left(\frac{1}{c + H^T H} \right) H^T (Y - H^T \hat{\theta}) \quad (28)$$

Dónde:

$\hat{\theta}$ Son los parámetros estimados

c Es una constante de aproximación

VI. ANALISIS DE RESULTADOS

Si se tiene una planta discreta de segundo orden (29).

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.5917z^{-1} + 0.02503z^{-2}}{1 - 0.3833z^{-1} + 6.17 \cdot 10^{-8} z^{-2}} \quad (29)$$

La cual tiene una respuesta en el tiempo como se muestra en la Fig.4.

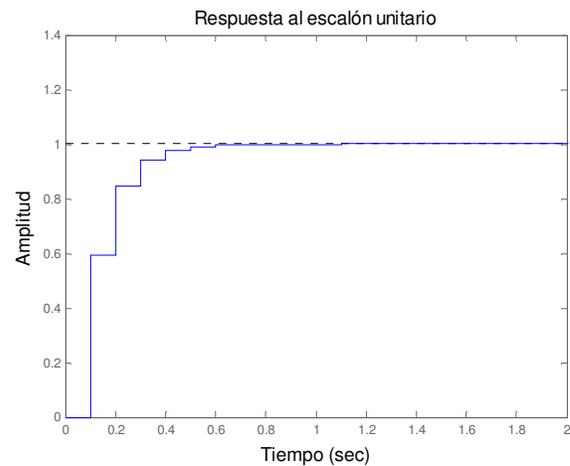


Fig.4 Respuesta al escalón en el tiempo de la planta (29)

Aplicando la técnica de control por planos deslizantes a la planta (29) se pueden obtener las Fig.5 y 6.

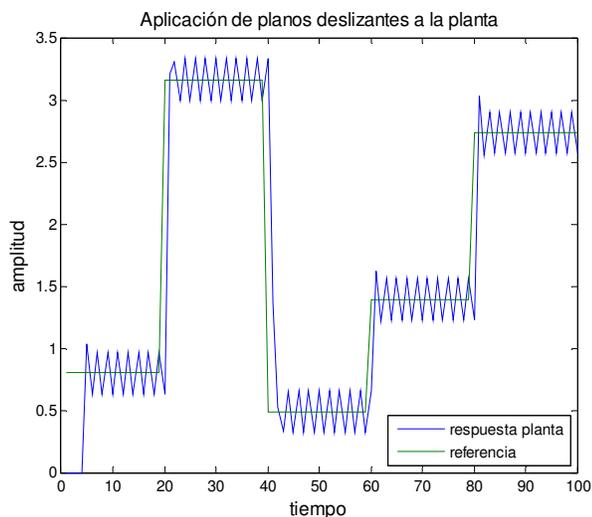


Fig.5 Respuesta de la planta (29) al aplicar control por planos deslizantes

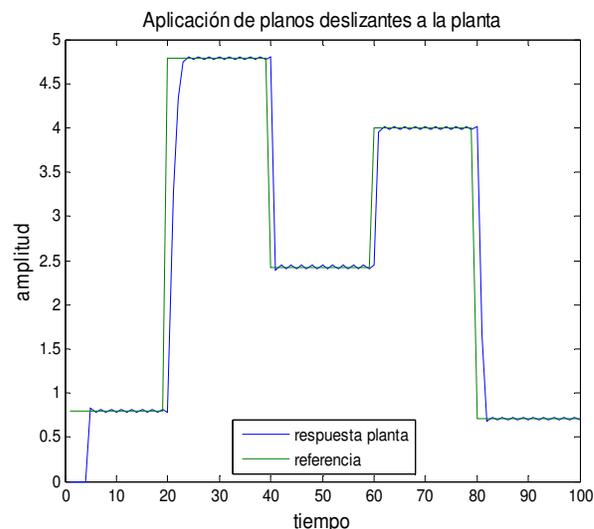


Fig.7 Respuesta de la planta (29) a la señal de control

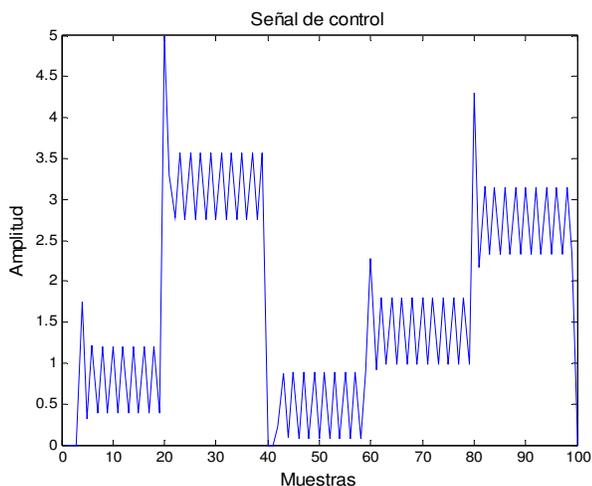


Fig.6 Señal de control aplicada a la planta (29)

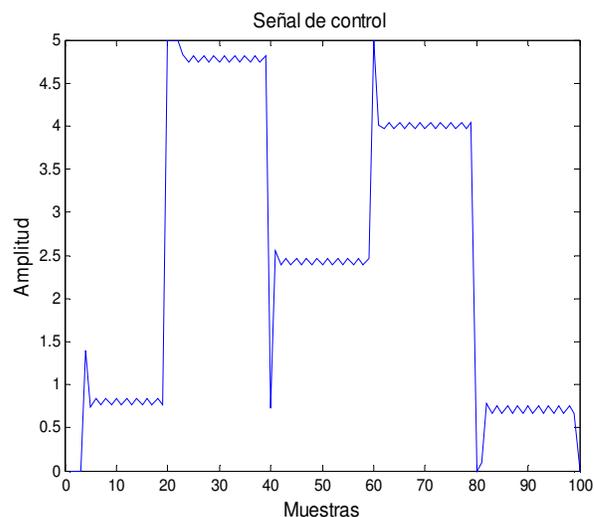


Fig.8 Señal de control aplicada a (29)

Se puede notar que la aplicación del control por modos deslizantes hace que la respuesta de la planta conmute alrededor de la referencia (plano de deslizamiento). En algunos casos señales conmutables de gran magnitud como la señal de control puede presentar problemas en los sistemas físicos, entonces se puede mejorar este rizado cambiando una constante de conmutación que previamente fue definida; para una constante mucho más pequeña se obtienen las Fig.7, 8.

La respuesta de la planta (29) al control por modos deslizantes es adecuada con respecto a los requerimientos, es altamente estable y la velocidad de alcance de la referencia es relativamente alta.

Para la aplicación en la planta mostrada en Fig.1 se utilizó una tarjeta de adquisición de datos, la cual entrega tensión de cero a 5 voltios (señal de control); En las siguientes graficas se mostrará el control por medio de la metodología fuera de línea y las mejoras al aplicar la identificación en línea.

Haciendo uso de la metodología fuera de línea para encontrar los parámetros del sistema y aplicando control por planos deslizantes se obtienen Fig.9, 10.

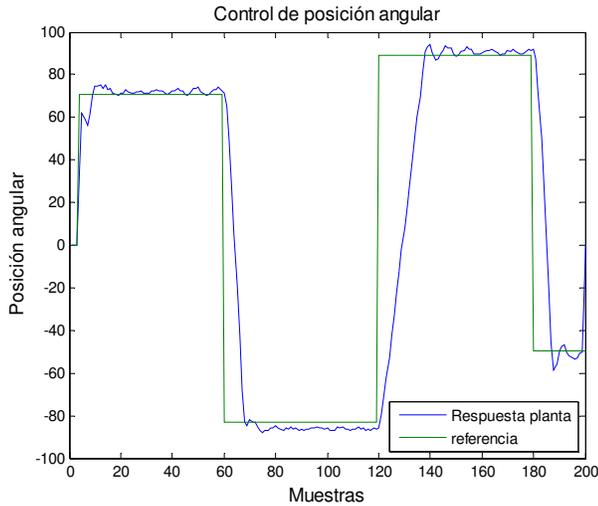


Fig.9 Respuesta de la planta aplicando metodología fuera de línea.

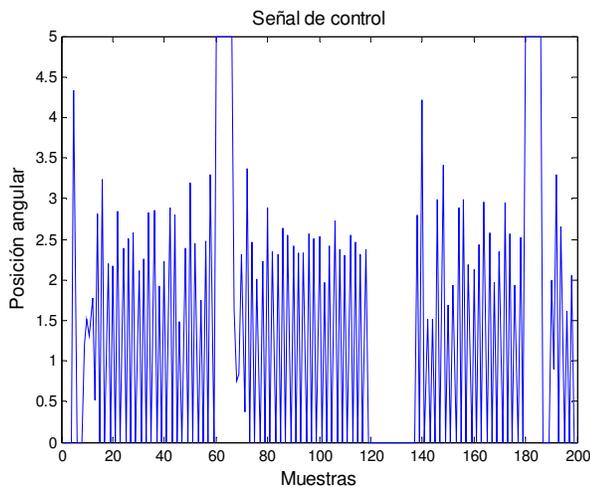


Fig.10 Señal de control aplicada a la planta física por medio de tarjeta de adquisición de datos

El control aplicado a la planta por medio de la identificación fuera de línea tiene buenos resultados tal como se presenta en Fig.9 pero presenta pequeños errores de estado estacionario, aún así puede presentar muchos más problemas si algún parámetro del sistema llega a cambiar dado que la metodología de estimación no es iterativa, para solucionar estos problemas se usa la metodología en línea la cual presenta los resultados mostrados en Fig.11, 12.

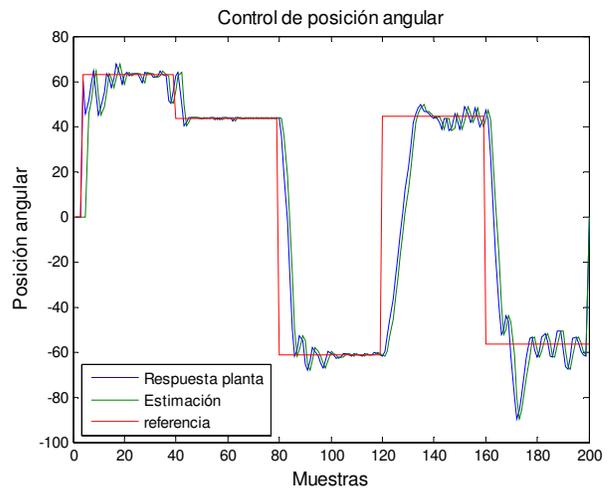


Fig.11 Respuesta del sistema aplicando la identificación en línea

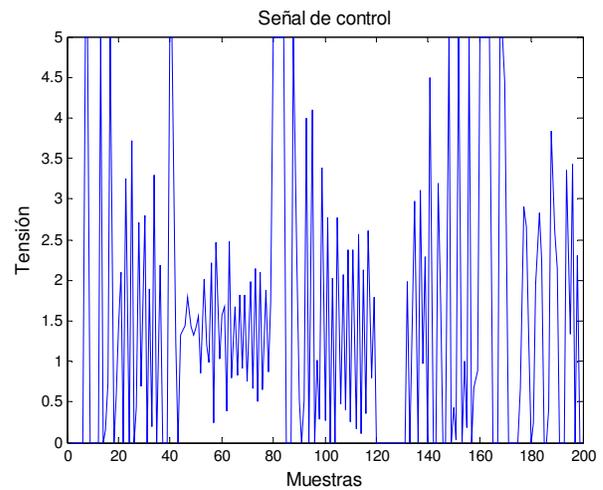


Fig.12 Señal de control aplicada.

Con la estimación en línea se eliminan problemas tanto de error estacionario como de cambio de parámetros en el sistema, aun así cuando la referencia varía muy rápido (en Fig.11 varía cada 40 muestras) presenta problemas de inestabilidades en la estimación y esto conlleva a variación alrededor de la referencia como se puede evidenciar en Fig.11, una respuesta mucho mejor se muestra en las Fig.13, 14, en las cuales la referencia es mucho menos variable [1].

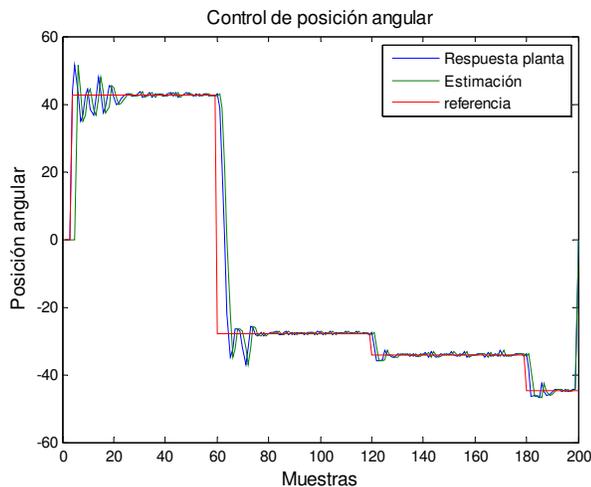


Fig.13 Respuesta de la planta al control por modos deslizantes

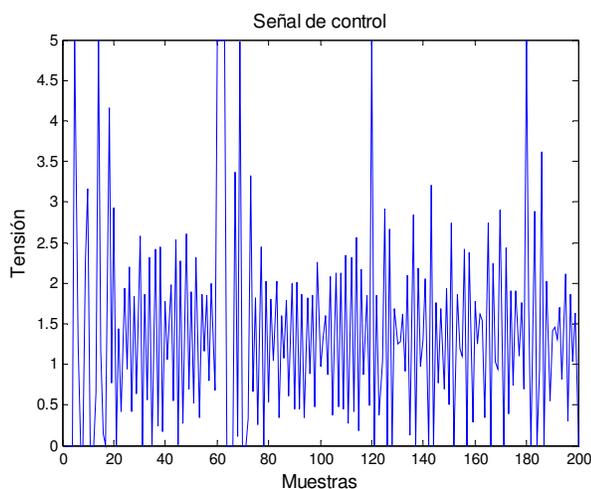


Fig.14 Control aplicado a la planta dada una referencia menos variable

En la Fig.13 se puede notar mucho menos variación que en la Fig.11 debido a que la referencia es menos variable, aún así se pueden notar que el controlador por planos deslizantes con la aplicación de la metodología en línea es muy robusto y controla perfectamente la planta la cual era el objetivo fundamental [1].

El problema de la utilización del controlador por modos deslizantes a un motor o una planta electromecánica es debido a las grandes conmutaciones que este presenta (Fig.6, 8, 10, 12, 14), por ejemplo estas conmutaciones en un motor genera cambios de giro bruscos y vibraciones mecánicas no deseadas.

VII. CONCLUSIONES

Se mostró el controlador por modos deslizantes mirándolo desde el modo no adaptativo hasta su nivel superior (modo adaptativo) y se buscaba garantizar la estabilidad del sistema físico por medio de la teoría de Lyapunov.

El gran beneficio de la ley de control por modos deslizantes es la garantía de que el sistema es estable para cualquier condición del mismo.

Como se logra ver el control por modos deslizantes es muy robusto (sin importar el tipo de identificación); el control del sistema alcanza los valores objetivo, modificando tanto el tiempo de respuesta (alcance de la referencia) como el error de estado estacionario.

La señal de control conmuta muy rápido, esto puede presentar problemas en algunos sistemas (se puede buscar la forma de filtrar algunos armónicos tal que la señal sea más estática), esta ley de control puede ser muy útil en dispositivos de usen electrónica de potencia, debido a que estos dispositivos necesitan señales pwm las cuales manejan las diferentes variables que ellos controlan.

REFERENCIAS

- [1] A. J. Debbie. "Uso de la técnica de control por planos deslizantes aplicada a sistemas". Tesis de Grado, Ingeniería eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, 2014.
- [2] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding mode," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 22, pp. 212-222, 1977.
- [3] Tsai, C.; Chung, H.; and Yu, F. Neuro-Sliding Mode Control With its applications to seesaw systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 15, No. 1, pp: 124-134, 2004.
- [4] Hoyos, J. "Control adaptativo usando planos deslizantes y redes neuronales de la velocidad de un motor AC", Tesis de Grado, Maestría en Ingeniería Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, 2004.
- [5] G. C. Goodwin, Peter J. Ramadge, and Peter E. Caines. "Discret time multivariable adaptive control". *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-25(3):449-456, 1980.

- [6] E. Giraldo, and D. Giraldo, “*Teoría de control análogo*”, Ediciones Universidad Tecnológica de Pereira, 2009.
- [7] Y. Bar-Shalom and Xiao-Rong. “*Estimation and Tracking*”. Artech House, 1993.
- [8] G. C. Goodwin and K. S. Sin. “*Adaptive Filtering, Prediction and Control*”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1984.